Calc di LibreOffice (autore: Vittorio Albertoni)

Il foglio di calcolo

Il foglio di calcolo non è altro che una grande tabella, formata da oltre un milione di righe e da oltre sedicimila colonne: all'incrocio di ogni riga e di ogni colonna si trova una cella nella quale possiamo inserire un dato letterale o numerico o una formula che faccia comparire nella cella stessa il risultato di elaborazioni, anche fatte su dati di altre celle.

L'indirizzo di ciascuna cella è formato dalla lettera che identifica la colonna della tabella seguita dal numero che identifica la riga della tabella: la prima cella in alto a sinistra è la cella A1. Sotto di essa sta la cella A2 e alla sua destra sta la cella B1.

Il più banale uso che si può fare del foglio di calcolo è quello di redigere tabelle da stampare, ben disposte grazie alle varie possibilità che ci sono offerte di formattare i dati, di scegliere i caratteri, i colori, ecc.

Qui non ci occuperemo di queste cose, ampiamente e chiaramente descritte in altre sedi, ivi compresa quella di accesso gratuito della guida che si apre scegliendo dal menu la voce ?.

Si tratta peraltro di operazioni che si compiono in modo intuitivo e basta un po' di esercizio per diventarne esperti.

All'estremo opposto sta la possibilità di utilizzare il foglio di calcolo, avvalendosi di un dialetto del linguaggio BASIC (OOBasic, cioè OpenOffice Basic, nel caso di LibreOffice), come ambiente di programmazione e come interprete dei programmi con esso creati.

Anche di questo non ci occuperemo, in quanto il discorso potrebbe essere affrontato da chi abbia già buone basi della tecnica di programmazione.

Mi dovrei allora rivolgere ad un pubblico al quale avrei poco da insegnare e che, molto probabilmente, raggiungerebbe risultati migliori programmando con altri linguaggi, ben più efficienti e performanti di un dialetto del BASIC, e senza passare, in questi casi, attraverso l'inutile intralcio dello strumento del foglio di calcolo.

Tutto ciò premesso, l'obiettivo che mi sono posto è quello di indicare alcuni modi di risolvere una serie di problemi matematici e statistici attraverso l'uso del foglio di calcolo così com'è, in modo che esperti matematici e statistici non perdano tempo a cercare ciò che loro può servire e i meno esperti si rendano conto di quali cose, a volte insospettabili, si riescano a fare con un foglio di calcolo e come si facciano.

Il lavoro svolto con il foglio di calcolo può essere salvato in un file, ricaricabile quando si vuole per rivedere, proseguire o modificare il lavoro. Ovviamente è bene avere tanti file quanti sono i lavori: per esempio un file per la contabilità di casa, un file per i conteggi effettuati per un mutuo, un file per la ricerca a supporto della tesi di laurea, ecc.

Bene sapere, comunque, che un foglio di calcolo può contenere tanti fogli di lavoro, tanti quanti ne regge la memoria del computer (cioè siamo nell'ordine delle migliaia), e ciascun foglio potrebbe far parte dello stesso lavoro ma potrebbe anche contenere un lavoro completamente diverso, per cui sarebbe possibile riunire nello stesso file lavori diversi.

Indice

1 Un esercizio istruttivo

Mi pare giusto che, parlando di calcolo e di matematica, si cominci col ricordare Leonardo da Pisa, meglio noto con il suo nomignolo Fibonacci, che all'inizio del 1200 introdusse in Europa - peraltro con parecchia fatica per superare le abitudini - la numerazione posizionale, che lo stesso Fibonacci definisce “indiana”, con il segno zero, già adottata dagli arabi (da cui la spesso usata definizione di cifre arabe), ma che ha origine sicuramente in estremo oriente: la prima iscrizione numerica comprendente lo zero posizionale che si sia trovata risale al 683 d.C. e fu trovata in Cambogia[1]. Senza questa innovazione non avremmo nemmeno il foglio di calcolo ma dovremmo ancora usare il pallottoliere.

Forse per divertimento, data la banalità del calcolo, un giorno il Fibonacci si è messo in mente di calcolare come avverrebbe la crescita di coppie di conigli nell'ipotesi che, partendo da una coppia originaria e sapendo che una coppia diventa fertile dopo un mese, dopo un altro mese, ogni coppia fertile generi una coppia. All'origine abbiamo una coppia; per tutto il primo mese abbiamo la stessa coppia nel suo primo mese di fertilità; il secondo mese abbiamo quella coppia più la coppia da essa generata nel secondo mese di fertilità, in tutto due coppie, di cui solo una fertile; il terzo mese abbiamo queste due coppie più la coppia generata dalla sola fertile, in tutto tre copie, di cui due fertili; il quarto mese abbiamo queste tre copie più le due generate dalle coppie fertili, in tutto cinque copie, di cui tre fertili; il quinto mese abbiamo queste cinque coppie più le tre generate dalle coppie fertili, in tutto otto coppie, ecc. Ne deriva una successione nella quale i primi due termini valgono 1 ed ogni termine successivo è formato dalla somma dei due che lo precedono (lo stesso secondo termine vale 1 in quanto è la somma tra i due termini che lo precedono, di cui uno vale 0 perché non c'é)

1 1 2 3 5 8 13 ....

Questa successione è nota come successione di Fibonacci.

Possiamo costruirla su un foglio elettronico, inserendo nella cella A1 il valore 1, nella cella A2 il valore 1 e nella cella A3 la formula $= A1 + A2$ (le formule si inseriscono sempre facendole precedere dal segno $=$).
A questo punto selezioniamo la cella A3 (andandoci sopra con le freccette della tastiera o puntandoci sopra il mouse) e la copiamo (menu Modifica -> Copia, oppure click destro -> Copia, oppure premendo contemporaneamente i tasti Ctrl e C).
Ora dobbiamo allargare la colonna A per predisporla a contenere numeri di grande dimensione. Possiamo allargarla, per esempio a 4 centimetri, scegliendo da menu Formato -> Colonna -> Larghezza e inserendo 4cm nella finestrella oppure posizionando il mouse sulla barra dove si trovano le lettere che identificano le colonne nel punto in cui termina, a destra, la colonna A: il puntatore assume l'aspetto di una doppia freccia e, con premuto il pulsante sinistro del mouse, lo possiamo trascinare verso destra fino a quando la colonna diventa larga quanto basta.
Adesso ci posizioniamo sulla cella A4 e selezioniamo le celle fino alla riga 74 compresa. Lo possiamo fare scorrendo la freccetta giù della tastiera mantenendo premuto il tasto Shift oppure trascinando verso il basso il mouse con premuto il pulsante sinistro: la zona selezionata compare più scura.
Nella zona selezionata incolliamo la formula che avevamo copiato prima dalla cella A3. Lo possiamo fare con menu Modifica -> Incolla, oppure, posizionati in un punto qualsiasi della zona selezionata, con click destro -> Incolla, oppure premendo contemporaneamente i tasti Ctrl e V. Finalmente compare la successione di Fibonacci nelle celle da 1 a 74 della colonna A del nostro foglio di calcolo. La figura 1, alla pagina seguente, mostra la schermata fino alla riga 29 e, sul computer, per scorrimento possiamo vedercela tutta.

Notiamo che ogni cella contiene un valore uguale alla somma dei due che lo precedono.

Salviamo il nostro lavoro, onde tenercelo pronto per il seguito dell'esercizio: da menu File -> Salva con nome... apriamo la finestra di dialogo Salva, nella quale diamo un nome al file, per esempio “fibonacci” e scegliamo la cartella in cui salvarlo.

[1] vedi Amir D. Aczel - Caccia allo zero, Raffaello Cortina Editore

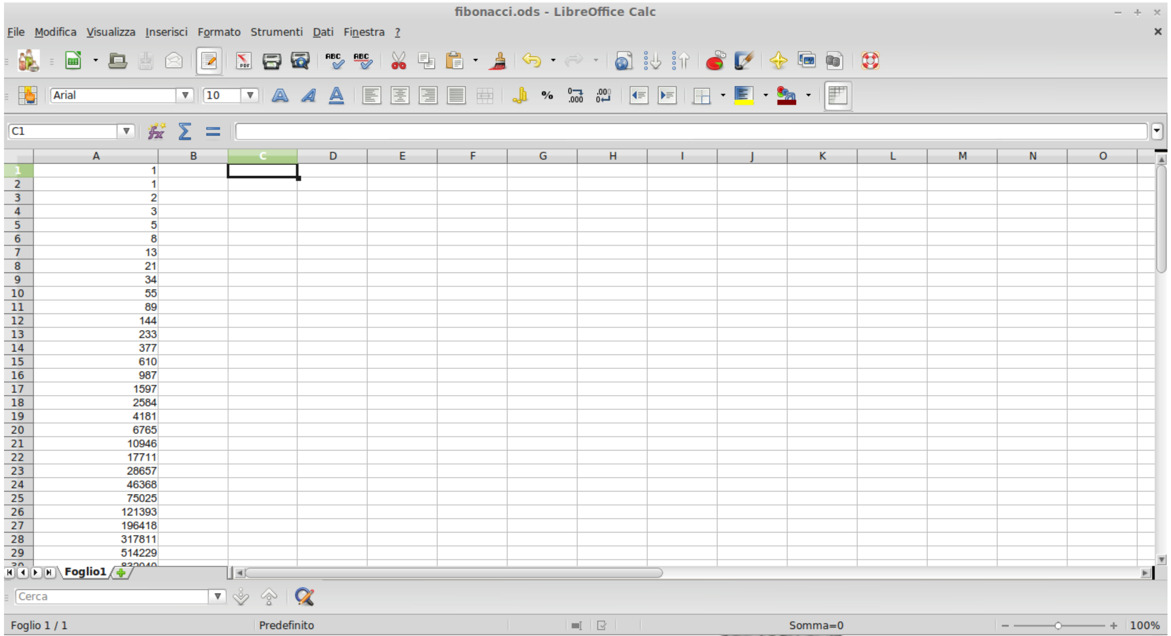


Figura 1: La successione di Fibonacci

Come mai, avendo copiato e incollato una formula che era scritta = A1 + A2, nella cella, per esempio, A13 troviamo il valore A11 + A12?

Questo avviene perché, quando copiamo una formula, i riferimenti al foglio che essa contiene non vengono copiati come riferimenti assoluti ma come riferimenti relativi. Per la formula che abbiamo inserito nella cella A3, i riferimenti A1 e A2 al foglio vengono visti e copiati come "la cella che sta sopra e quella che sta due volte sopra", per cui la nostra formula, copiata nella cella A13, diventa = A11 + A12.

Quando questa impostazione di default del foglio non ci sta bene dobbiamo inserire nella formula il riferimento come riferimento assoluto, facendo precedere alla lettera che indica la colonna e alla cifra che indica la riga il simbolo $. Se avessimo inserito nella cella A3 la formula = $A$1 + $A$2, la nostra operazione, anziché farci vedere la successione di Fibonacci ci avrebbe fatto vedere una serie di numeri 2, in quanto in tutte le celle, sarebbero stati inseriti i riferimenti ai valori delle celle A1 e A2.

Abbiamo detto che ogni cella contiene un valore uguale alla somma dei due che lo precedono. Se, però, andiamo in fondo alla nostra successione vediamo che non sempre è vero. Osservando la figura 2 notiamo che nella cella A73 c'è la somma delle celle A71 e A72 ma nella cella A74 non c'è la somma delle celle A72 e A73: le ultime tre cifre, che dovrebbero essere 657, sono 660.

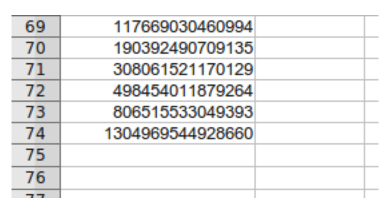


Figura 2: Dove arriva la precisione numerica

Notiamo anche che il numero nella cella 73 è composto da 15 cifre e il numero nella cella 74 è composto da 16 cifre.

Dal momento che la precisione numerica del foglio di calcolo arriva a 15 cifre, il numero composto da 16 cifre viene scritto arrotondando la penultima, l'ultima significativamente gestibile, e viene inserito uno zero al posto dell'ultima.

Scopriamo così un limite del foglio di calcolo che è bene tenere presente nel maneggiare numeri grossi. Peraltro anche se facessimo i nostri conti con programmi scritti con i più famosi linguaggi di programmazione, dal Pascal al C e suoi derivati, come C++, ADA, Java, ecc. troveremmo problemi di questo tipo. Per avere tutti i numeri scritti per bene nella loro illeggibile lunghezza fino ad esaurimento della memoria del computer dovremmo ricorrere ad un programma scritto con il linguaggio Python. Ammettiamo, comunque, che 15 cifre significative non sono poche e accontentiamoci.

Al suo comparire la successione di Fibonacci fu considerata nient'altro che un conto di conigli. Ma col tempo si riscontrò uno strano ricorrere dei numeri che la compongono in natura, nei petali che formano un fiore, nelle foglie su uno stelo, ecc. fino alla scoperta di una magica relazione tra la successione di Fibonacci e il numero aureo φ, a volte rappresentato anche con la fi maiuscola Φ, che proviene dalla sezione aurea.

La sezione aurea o rapporto aureo è il rapporto tra due grandezze diseguali di cui la maggiore è medio proporzionale tra la minore e la somma delle due. Come a dire che se abbiamo due segmenti a e b, con a maggiore di b, il rapporto tra $(a+b)$ e a è uguale al rapporto tra a e b. Quando tra due grandezze si realizza l'uguaglianza di questo rapporto si dice che queste due grandezze sono in rapporto aureo o, anche, come diceva Luca Pacioli, in proporzione divina.
Questo rapporto ricorre spesso in natura (forma spirale di alcune conchiglie, ammassi di galassie, ecc.) e, non si sa se scientemente o semplicemente perché così è bello, in numerose opere d'arte (Grande Piramide di Giza, Partenone di Atene, ecc.)[2].
Partendo dall'equazione prima descritta, si arriva a scoprire che φ è calcolabile risolvendo una semplice equazione di secondo grado attraverso i seguenti pochi passaggi

$$\tfrac{a+b}{a} = \tfrac{a}{b} = \varphi$$

ponendo $a = b\varphi$ e sostituendo abbiamo

$$\tfrac{b\varphi+b}{b\varphi} = \tfrac{b\varphi}{b} \text{ da cui } \tfrac{b(\varphi+1)}{b\varphi} = \tfrac{b\varphi}{b} \text{ e, semplificando b, } \tfrac{\varphi+1}{\varphi} = \varphi$$

da cui finalmente l'equazione $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ la cui unica soluzione positiva è

$$\varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ci troviamo di fronte a un numero irrazionale, cioè non esprimibile come frazione tra interi e avente cifre decimali che si estendono all'infinito: come accade per altri, come il famosissimo π, il numero e base dei logaritmi naturali, la radice quadrata di 2, che fece impazzire Pitagora, ecc. Il suo valore, fino alla diciassettesima cifra decimale è

1,61803398874989484........

Se disegniamo un rettangolo con altezza 2 e base 3,236 in modo che il rapporto tra base e altezza sia uguale a φ, dovremmo avere disegnato un bel rettangolo, armonioso nelle sue proporzioni.

Ma torniamo alla nostra successione di Fibonacci e, allargando adeguatamente la colonna B nel foglio di calcolo, inseriamo nella cella B2 la formula = A2/A1 (A2 diviso A1) e, con il procedimento visto prima, copiamola fino alla cella B74, dopo aver abilitato le celle selezionate per la copiatura a contenere cifre con 15 decimali (a celle selezionate, con il menu FORMATO -> CELLE o con click destro -> FORMATTA CELLE apriamo la finestra di dialogo per la formattazione e, nella scheda NUMERI, inseriamo 15 nella finestrella POSIZIONI DECIMALI).
Nella colonna B ci ritroviamo una successione di numeri che oscillano attorno al valore di φ avvicinandosi sempre più ad esso, senza mai uguagliarlo (dalla colonna 41 scatta il limite della precisione numerica di cui abbiamo parlato prima e il fenomeno non si avverte più ma in realtà c'è).

Misteri della matematica.

Risalviamo il nostro lavoro ricorrendo al menu FILE -> SALVA (non facciamo più SALVA CON NOME... in quanto già lo abbiamo fatto prima).

[2] A chi voglia approfondire suggerisco Mario Livio - La sezione aurea, editore Mondadori.

L'esistenza di questo rapporto approssimativamente costante tra un elemento della successione e il precedente ci offre la possibilità di calcolare il valore di un termine qualsiasi della successione di Fibonacci senza bisogno di sviluppare tutta la successione.

Il matematico Jacques Binet ha inventato la seguente formula per arrivare a questo

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

dove F_n è l'elemento cercato e n è la sua posizione nella successione.

La cosa sorprendente di questa formula è che essa fornisce come risultato un numero intero nonostante abbia in sé numeri irrazionali. Purtroppo di ciò non ci accorgiamo sempre utilizzando il foglio di calcolo a motivo del solito discorso dei limiti numerici e di calcolo.

Anzi, volendo utilizzare questa formula nel foglio di calcolo, visto che il secondo membro nelle parentesi quadre è un correttivo infinitesimo, possiamo trascurarlo e utilizzare la formula semplificata

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{cioè } \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$$

con l'avvertenza che il risultato non sarà il numero intero cercato ma una sua approssimazione e la soluzione cercata sarà il numero intero più vicino al risultato.

Vediamo di fare questi calcoli nel nostro foglio. Se non l'abbiamo tuttora aperto lo carichiamo (andiamo nella cartella dove l'avevamo salvato e facciamo doppio click su di esso oppure apriamo il foglio di calcolo e da menu FILE -> APRI... andiamo a cercarlo).

Organizziamo il nostro calcolo su tre celle.
Innanzi tutto allarghiamo la colonna D portandola a circa 4 centimetri.
La cella D1 la lasciamo vuota e la riserviamo all'inserimento del numero indicante la posizione dell'elemento da calcolare.
Nella cella D2 inseriamo la formula per calcolare φ e nella cella D3 inseriamo la formula per calcolare l'elemento in posizione n. Potremmo inserire tutta la formula nella cella D2 ma preferisco non farlo innanzi tutto perché diventerebbe più complicato ma soprattutto perché ciò mi torna comodo per lo sviluppo successivo dell'esercizio.
Partiamo dalla cella D2 dove dobbiamo inserire la formula per calcolare φ che è, ricordiamo,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Gli operatori elementari per fare i calcoli sul nostro foglio sono + per la somma, - per la sottrazione, / per la divisione, * per la moltiplicazione e ^ per l'elevamento a potenza. Non abbiamo un operatore elementare per l'estrazione della radice quadrata. Per ora rimedieremo ricordando che la radice di un numero altro non è che l'elevamento a potenza di quel numero con esponente uguale al reciproco dell'indice di radice. Cioè $\sqrt{5}$ si può scrivere $5^{1/2}$così come $\sqrt[3]{5}$ si può scrivere $5^{1/3}$, ecc.
Tenuto conto di ciò, dopo aver abilitato le cella a contenere una cifra con 15 decimali come abbiamo fatto prima per le celle della colonna B, la formula che inseriamo è

=(1+5^(1/2))/2

Attenzione che il foglio di calcolo agisce in base alla precedenza algebrica degli operatori (dopo la risoluzione di eventuali parentesi, prima elevamento a potenza, poi moltiplicazione e divisione e poi addizione e sottrazione) e che, per rispettare le precedenze volute da noi, dobbiamo inserire opportune parentesi. Se per elevare 5 a 1/2 scriviamo 5^1/2 otteniamo 2,5, cioè 5, elevato a 1 cioè ancora 5, diviso 2. Se invece scriviamo 5^(1/2) otteniamo il valore giusto, perché il foglio calcola innanzi tutto il valore di 1/2 tra parentesi tonde e poi lo usa per calcolare la potenza di 5. Stesso discorso per le parentesi tonde che racchiudono il numeratore: se non le mettessimo il foglio, dando

per default precedenza alla divisione sull'addizione, calcolerebbe prima il rapporto tra 5^(1/2) e 2 e poi aggiungerebbe 1, che non è esattamente quello che vogliamo fare noi.
Se abbiamo fatto bene, una volta inserita la formula e dato Invio, dovrebbe comparire nella cella D2 il valore di φ sempre con il solito arrotondamento dell'ultima cifra gestibile dal foglio di calcolo (la quindicesima contando anche la parte intera).
Proseguiamo il nostro lavoro inserendo nella cella D3 la formula per il calcolo del valore dell'ennesimo elemento della successione.
Abbiamo detto che, utilizzando, come abbiamo fatto, la formula semplificata, dobbiamo prendere per buono il valore intero più vicino a quello risultante dalla formula stessa.
La formula semplificata, ricordiamo, è

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$$

Per arrotondarne il valore all'intero più vicino, o ci arrangiamo leggendo il risultato e arrotondandolo a vista (leggiamo 2 se c'è scritto 2,3, leggiamo 3 se c'è scritto 2,8) o facciamo una cosa più seria e ce lo facciamo scrivere dal foglio di calcolo, visto che, tra le tante funzioni che conosceremo leggendo questo libro, ce n'è una, la prima che stiamo per conoscere, che si chiama Arrotonda e che fa per noi ciò che abbiamo visto prima per leggere 2,3 o 2,8, cioè scrive 2 anziché 2,3 e 3 anziché 2,8.
Visto che abbiamo ormai messo le mani sulle funzioni, dobbiamo anche sapere che ce n'è un'altra che calcola la radice quadrata e si chiama Radq.
Fatto tesoro di queste nuove conoscenze, andiamo a scrivere nella cella D3 la formula

=ARROTONDA(D2^D1/RADQ(5))

nella quale al posto di φ inseriamo il valore della cella D2 e al posto di n inseriamo il valore della cella D1.
Dal momento che la cella D1 è ancora vuota, dopo inserita la formula nella cella D3 e dato invio, nella stessa cella D3 compare uno 0.
Se ora ci spostiamo sulla cella D1 e inseriamo, per esempio, 7, dato Invio vediamo comparire 13 nella cella D3 e 13 è, infatti, il settimo elemento della successione di Fibonacci.
Possiamo divertirci a calcolarne altri, anche molto avanti nella successione, sapendo, tuttavia, che il risultato sarà preciso limitatamente alle prime 15 cifre del numero trovato (le eventuali altre saranno tutti zeri).

Ora propongo un esperimento.

Allarghiamo a 4 centimetri la colonna E e, nella cella E2, inseriamo il valore di φ che, come abbiamo già messo in evidenza prima, con precisione fino alla diciassettesima cifra decimale è

1,61803398874989484........

Ovviamente questo valore è stato calcolato con strumento diverso dal foglio di calcolo che, come abbiamo ormai capito, si sarebbe fermato a quindici cifre significative compresa la parte intera.
Abilitiamo la cella E2 a contenere una cifra con 15 decimali e cominciamo a inserire il valore di φ con 10 decimali, inseriamo, cioè, il valore 1,6180339887.
Copiamo nella cella E3 la formula contenuta nella cella D3 e proviamo a calcolare un po' di valori di elementi della successione inserendone l'indicatore di posizione uguale nelle celle D1 e E1.
Possiamo riscontrare che, fino a quando il valore inserito in D1 e E1 è inferiore o pari a 42 il risultato che compare nelle celle D3 e E3 è uguale. Dal numero 43 in poi non è più così. Evidentemente nella colonna D si lavora con un precisione maggiore che non nella colonna E. Infatti, tra le due colonne, quella che evidenzia risultati uguali a quelli reali fino a dove li possiamo leggere nella colonna A è la colonna D.

Proviamo allora ad inserire in E2 il valore di φ con 14 decimali, inseriamo, cioè, il valore 1,61803398874989, in modo da utilizzare tutte le 15 cifre significative che gestisce il foglio di calcolo (14 decimali più l'intero).
Ancora non ci siamo. Infatti i risultati nelle celle D3 e E3 coincidono fino a quando calcoliamo il valore nella posizione 61 ma, come inseriamo nelle celle D1 e E1 il valore 62, i due risultati non coincidono più. Ancora nella colonna D si lavora con maggiore precisione, nonostante ormai abbiamo messo in gioco tutte le 15 cifre significative che gestisce il foglio di calcolo.
Se abbiamo voglia di continuare l'esperimento ci accorgiamo che, per arrivare a far coincidere i risultati, occorre inserire in E2 il valore di φ con 17 decimali che, come abbiamo visto, è 1,61803398874989484, cioè 18 cifre compreso l'intero. Ciò significa che nella colonna D, dove il valore di φ è calcolato, si lavora con precisione a 18 cifre.
Da notare che, fedele al fatto di non produrre numeri con più di 15 cifre significative, nonostante in E2 abbiamo inserito il valore di φ con 17 decimali, sempre in E2 ce lo ritroviamo scritto con sole 15 cifre significative di cui l'ultima arrotondata. Dei decimali in più il foglio tiene conto unicamente nel fare il calcolo al suo interno.

* * *

Con il nostro esercizio, oltre ad aver fatto una passeggiata tra curiosità e misteri della matematica, abbiamo familiarizzato con le principali azioni connesse all'uso del foglio di calcolo ed abbiamo scoperto che il foglio di calcolo non è onnipotente ed ha una precisione numerica di 15 cifre, pur vantando una precisione di calcolo a 18 cifre.

Qualche approfondimento merita l'uso delle funzioni preconfezionate nel foglio di calcolo.

Come si sarà ben compreso, in una cella del foglio di calcolo possiamo inserire qualsiasi formula, anche la più complessa, e il foglio di calcolo, pur con i limiti di precisione che abbiamo scoperto, ci restituisce un risultato. Le difficoltà stanno nel conoscere la formula o nell'elaborarla in maniera adatta al problema che vogliamo affrontare e nello scriverla in maniera tale che il foglio la possa leggere ed elaborare come si deve. E si tratta di una difficoltà che moltissime volte è di buon rilievo, alle soglie della non superabilità.

Il foglio di calcolo ci viene in aiuto, perché chi l'ha programmato lo ha arricchito di una serie di formule dedicate alla soluzione di svariati problemi e calcoli. Anzi, ha fatto ancora di più: queste formule, senza neanche che le vediamo nella loro composizione e senza vedere gli operatori che le costituiscono, ci sono presentate come funzioni aperte all'acquisizione dei dati necessari per ottenere un risultato ad essi ricollegabile, cioè i parametri.

Un semplice esempio.

Se vogliamo calcolare la somma di due numeri, inseriamo il primo numero nella cella A1 e il secondo numero nella cella A2.
Per ottenere il risultato, per esempio nella cella A3, abbiamo due strade.
O inseriamo noi nella cella A3 la formula = A1 + A2, sapendo che per sommare due numeri dobbiamo ricorrere all'operatore +.
Oppure richiamiamo una funzione, che esiste e si chiama Somma, che richiede come parametro la zona di celle che contengono i valori da sommare espressi dalla cella iniziale della zona stessa e dalla sua cella finale, separati dal segno di due punti, così = Somma(A1:A2).
Pur nella sua banalità, l'esempio ci mostra come nel primo caso ci sia richiesto di sapere che per sommare due numeri occorre usare l'operatore + mentre, nel secondo, ci basti solo "dire" al computer che cosa "sommare": il problema diventa, semmai, sapere come dirglielo (cella iniziale e cella finale separate da due punti).
Se, anziché la somma di due numeri, la nostra incognita fosse il tasso di interesse percentuale applicato a un prestito di 1.000 euro da restituire in 12 mensilità di 90 euro l'una, ben si comprende la differenza che correrebbe tra inserire noi in una cella del foglio di calcolo la formula risolutiva (tra

l'altro, in questo caso, saremmo in presenza di un'equazione trascendente) e richiamare, invece, la funzione, che esiste e si chiama Tasso, dandogli in pasto i tre parametri del problema.

L'inserimento delle formule che abbiamo usato nel nostro esercizio lo abbiamo fatto scrivendo le formule stesse con la tastiera (tra l'altro ricordo che per tutto ciò che scriviamo in questi casi è indifferente che usiamo caratteri maiuscoli o minuscoli, ci pensa poi il foglio a tradurre tutto in maiuscolo). Così facendo abbiamo però il problema di sapere quali parametri sono richiesti e come e in che ordine inserirli.

Il problema si risolve attraverso la creazione guidata funzione, procedimento che si avvia da menu Inserisci -> Funzione..., oppure con la combinazione di tasti Ctrl + F2 premuti contemporaneamente, oppure cliccando sul pulsante con l'icona  nella barra degli strumenti. Con una di queste azioni, posizionati nella cella in cui vogliamo trovare il risultato della nostra elaborazione, apriamo la finestra di dialogo illustrata nella figura 3.

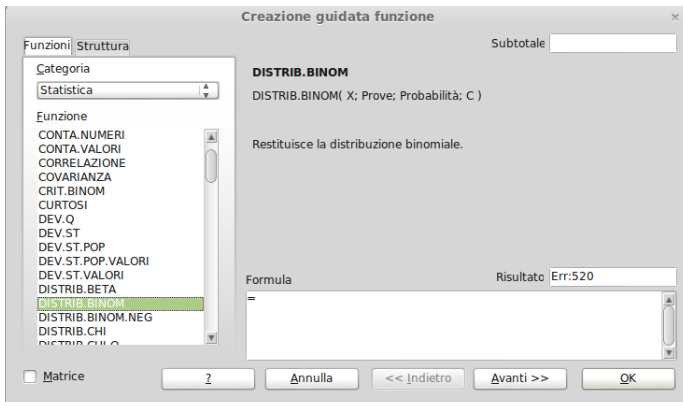


Figura 3: Finestra per la creazione guidata di funzione

E' selezionata la funzione della Distribuzione binomiale nella categoria Statistica.

Nella finestra abbiamo l'indicazione del nome della funzione, l'indicazione di come e con quali parametri scriverla e una succinta descrizione di cosa ci restituisce la funzione. Per saperne di più possiamo cliccare sul pulsante con l'icona ?.

Se clicchiamo sul pulsante con la scritta Avanti >> apriamo la finestra attraverso la quale possiamo inserire la funzione, senza scriverla noi, con i relativi parametri da scrivere nelle rispettive finestrelle. Questa finestra è riprodotta nella figura 4.

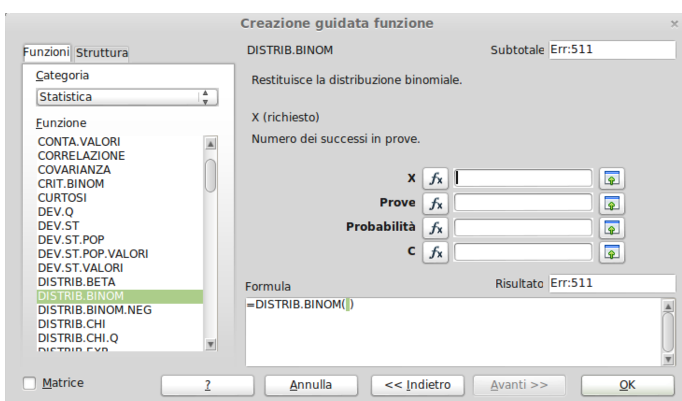


Figura 4: Successiva finestra per l'inserimento della funzione e dei parametri

Man mano ci posizioniamo nelle finestrelle per i parametri, sopra vediamo la descrizione di questi.

L'inserimento avviene o digitando sulla tastiera il valore del parametro, oppure digitando sulla tastiera l'indirizzo della cella che lo contiene, oppure ancora cliccando sulla cella che lo contiene.

Finito l'inserimento dei parametri richiesti, cliccando sul pulsante con la scritta OK completiamo.

2 Aritmetica e matematica elementare

2.1 Operatori di base

2.1.1 Operatori aritmetici

Gli operatori per eseguire le operazioni aritmetiche di base sono:
+ per l'addizione
- per la negazione e per la sottrazione
* per la moltiplicazione
/ per la divisione
^ per l'elevamento a potenza
% per il calcolo della percentuale

Gli operatori per l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione si collocano tra le due cifre (o tra i due riferimenti a celle) oggetto dell'operazione.

L'operatore per l'elevamento a potenza si colloca tra la base (o il riferimento alla cella che contiene il valore della base) e l'esponente (o il riferimento alla cella che contiene il valore dell'esponente)[3].

L'operatore per il calcolo della percentuale si inserisce dopo le cifre di un numero che debba servire per calcolare una percentuale. Possiamo utilizzarlo per qualificare il contenuto di una cella: se inseriamo 25% in una cella, in quella cella sarà, in realtà, memorizzato il numero 0,25 e la moltiplicazione di un numero per il contenuto di quella cella restituirà il 25% del numero. Possiamo anche utilizzarlo in maniera diretta: per esempio, per calcolare il 5% di 125 basta inserire in una cella la formula =125*5%.

2.1.2 Operatore di testo o di congiunzione

E' l'operatore che unisce due valori generando una stringa, cioè un valore di testo, ed è costituito dal simbolo **&**.

Se il valore è un valore numerico, esso viene automaticamente trasformato in carattere.

Per esempio = 2 & 3 genera 23. Se nella cella A1 abbiamo inserito Vittorio e nella cella B1 abbiamo inserito Albertoni, = A1 & B1 genera VittorioAlbertoni. Se vogliamo inserire uno spazio tra nome e cognome dobbiamo inserire una stringa vuota di un carattere: = A1 & " " & B1, ed avremo allora Vittorio Albertoni.

2.1.3 Operatori di riferimento

Questi operatori restituiscono un intervallo o un insieme di celle. Essi sono:

: operatore di intervallo o di area. Genera un riferimento a celle comprese tra due riferimenti, questi inclusi. Per esempio (A1:A8) genera un riferimento alle prime 8 celle della colonna A; (A1:B5) genera un riferimento all'area di celle compresa tra la cella A1 e la cella B5.

; operatore di unione. Genera un insieme di riferimenti. Per esempio (A1;G2) genera un riferimento alle due celle A1 e G2; (A1:A4;C1:C2) genera un riferimento alle prime quattro celle della colonna A e alle prime due della colonna C.

[3]Quando si utilizzano operatori elementari o formule, gli operandi o i parametri per le formule possono sempre essere inseriti direttamente oppure attraverso il riferimento alle celle in cui sono contenuti. Da qui in poi non lo ricorderò più e parlerò genericamente di "valori" da inserire tra operandi o in una formula, dando per scontato che questi "valori" possono essere inseriti direttamente (= 2 + 4) oppure attraverso l'indirizzo delle celle che li contengono (= A1 + A2).

! operatore di intersezione. Genera un riferimento alle celle in comune tra due riferimenti. Per esempio (G1:H3!H2:I3) genera un riferimento alle celle H2 e H3.

2.2 Costruire formule

Utilizzando gli operatori di base costruiamo formule che restituiscono risultati.

Una formula si costruisce facendo seguire al simbolo = i valori o i riferimenti ai valori inframmezzati dagli operatori che consentano di arrivare al risultato voluto.

Per esempio, = 3 ^ A1 è un formula che restituisce il valore di 3 elevato alla potenza che troviamo memorizzata nella cella A1: se nella cella A1 c'è 2, otteniamo il risultato 9 (3 al quadrato) e, se nella cella A1 c'è 3 otteniamo il risultato 27 (3 al cubo).

Nella costruzione delle formule è importantissimo tenere in considerazione l'ordine con cui il foglio di calcolo esegue le operazioni.

Per default questo ordine è il seguente:

- innanzi tutto vengono eseguiti gli operatori di riferimento, nell'ordine **:** **;** e **!**
- segue l'esecuzione dell'operatore di negatività **-**
- segue l'esecuzione dell'operatore %
- segue l'esecuzione dell'operatore ^
- segue l'esecuzione degli operatori * e /
- segue l'esecuzione degli operatori + e **-** (come sottrazione)
- segue l'esecuzione dell'operatore &.

Se questo ordine non coincide con quello da noi voluto, dobbiamo racchiudere tra parentesi la parte di formula che vogliamo sia calcolata prima.

Nel Capitolo 1, nel corso del proposto esercizio dimostrativo, abbiamo già affrontato questa situazione con un esempio.

2.3 Formule e funzioni già pronte

Il foglio di calcolo contiene una grande quantità di formule e di funzioni, predisposte per i più svariati usi.

In questo paragrafo vediamo quelle ricollegabili al titolo del capitolo, cioè quelle che attengono l'aritmetica e la matematica elementare. Se vogliamo dedicare il termine di funzione alle situazioni di maggiore complessità, quelle che vediamo qui sono semplicemente formule.

Nell'ultima parte del Capitolo 1 abbiamo visto che le formule e le funzioni possono essere inserite manualmente, digitandone nome e parametri con la tastiera oppure avvalendoci della creazione guidata di funzioni. Quelle che vediamo in questo paragrafo, dal momento che quasi generalmente hanno parametri ovvi, sono inseribili agevolmente da tastiera, sempre ricordando il segno = iniziale e sapendo che è indifferente usare caratteri maiuscoli o minuscoli. E' possibile inserire il segno iniziale = cliccando sul pulsante con l'icona nella barra degli strumenti. Non appena digitiamo il nome della funzione, comunque, veniamo guidati da opportuni suggerimenti visuali.

2.3.1 Formule di manipolazione numerica

Sono formule che modificano il numero cui si riferiscono.

Seguendo un ordine alfabetico abbiamo le seguenti:

ARROTONDA(N; decimali)
Restituisce N arrotondato a una determinata quantità di decimali. Se decimali viene omesso o è pari a zero, la funzione arrotonda al numero intero più vicino. Se decimali è negativo, la funzione arrotonda alla decina, centinaia, migliaia, ecc. più vicina, se decimali negativo è, rispettivamente, -1, -2, -3, ecc.
Esempio:
=ARROTONDA(123,6789;2) restituisce 123,68
=ARROTONDA(123,6789) restituisce 124
=ARROTONDA(123,6789;-2) restituisce 100

ARROTONDA.PER.DIF(N; decimali)
Restituisce N arrotondato per difetto (verso lo zero) a una determinata quantità di decimali. Se decimali è omesso o è zero, la funzione arrotonda per difetto verso un intero. Se decimali è negativo, la funzione arrotonda per difetto alla decina, centinaia, migliaia, ecc. se decimali negativo è, rispettivamente, -1, -2, -3, ecc.
Esempio:
=ARROTONDA.PER.DIF(123,6789;2) restituisce 123,67
=ARROTONDA.PER.DIF(123,6789) restituisce 123
=ARROTONDA.PER.DIF(123,6789;-1) restituisce 120

ARROTONDA.PER.ECC(N; decimali)
Restituisce N arrotondato per eccesso (partendo da zero) a una determinata quantità di decimali. Se decimali è omesso o è zero, la funzione arrotonda per eccesso a un numero intero. Se decimali è negativo, la funzione arrotonda per eccesso alla decina, centinaia, migliaia, ecc., successiva se decimali negativo è, rispettivamente, -1, -2, -3, ecc.
Esempio:
=ARROTONDA.PER.ECC(123,6789;2) restituisce 123,68
=ARROTONDA.PER.ECC(123,6789) restituisce 124
=ARROTONDA(123,6789;-1) restituisce 130

Della serie ARROTONDA ometto le funzioni ARROTONDA.DIFETTO, ARROTONDA.ECCESSO e ARROTONDA.MULTIPLO a causa della loro scarsa utilità.

ASS(N)
Restituisce il valore assoluto di N, cioè N senza segno.
Esempio:
=ASS(-12) restituisce 12

DISPARI(N)
Restituisce N arrotondato per eccesso al dispari intero successivo.
Esempio:
=DISPARI(3,4) restituisce 5

INT(N)
Restituisce N arrotondato per difetto all'intero più vicino. I numeri negativi sono arrotondati per difetto all'intero inferiore.
Esempio:
=INT(7,8) restituisce 7
=INT(-3,4) restituisce -4

PARI(N)
Restituisce N arrotondato per eccesso al pari intero successivo.
Esempio:
=PARI(8,4) restituisce 10

TRONCA(N; decimali)
Restituisce N con una determinata quantità di decimali. I decimali in eccesso sono semplicemente rimossi, a prescindere dal segno.
Se decimali è zero, TRONCA si comporta come INT per i numeri positivi, ma arrotonda verso lo zero per i numeri negativi.
Esempio:
=TRONCA(12,7634; 2) restituisce 12,76
=TRONCA(7,35) restituisce 7
=TRONCA(-3,4) restituisce -3

2.3.2 Formule e funzioni di calcolo

Le formule e funzioni matematiche di base che ci offre il foglio di calcolo sono, in ordine alfabetico, le seguenti.

CASUALE()
Restituisce un numero casuale tra 0 e 1 e genera un nuovo numero casuale ogni volta che si ripete il calcolo. Per forzare il foglio a ripetere il calcolo manualmente occorre premere MAIUSC+CTRL+F9. Per generare numeri casuali non ricalcolabili, occorre copiare le celle contenenti questa funzione, e utilizzare MODIFICA - INCOLLA SPECIALE (con le opzioni INCOLLA TUTTO e FORMULE DISATTIVATE e quella NUMERI attivata).

CASUALE.TRA(inferiore; superiore)
Restituisce un numero intero casuale tra l'intero inferiore e quello superiore (entrambi inclusi). Questa funzione genera un nuovo numero casuale ogni volta che il foglio ripete il calcolo. Per forzare il foglio a ripetere il calcolo manualmente occorre premere MAIUSC+CTRL+F9. Per generare numeri casuali non ricalcolabili, occorre copiare le celle contenenti questa funzione, e utilizzate MODIFICA - INCOLLA SPECIALE (con le opzioni INCOLLA TUTTO e FORMULE DISATTIVATE e quella NUMERI attivata).

EXP(N)
Restituisce la potenza ennesima di e.
Esempio:
=EXP(1) restituisce 2,71828182845904 cioè il numero e
=EXP(5) restituisce 148,413159102577 cioè e^5

LN(N)
Restituisce il logaritmo naturale (cioè in base e) di N.
Esempio:
=LN(5) restituisce 1,60943791243410 che è il logaritmo in base e di 5
=LN(EXP(16)) restituisce 16, ovviamente

LOG(N; base)
Restituisce il logaritmo di N nella base indicata.
Esempio:
=LOG(16;2) restituisce 4, che è il logaritmo in base 2 di 16
=LOG(5^3;5) restituisce 3, ovviamente

LOG10(N)
Restituisce il logaritmo decimale (cioè in base 10) di N.
Esempio:
=LOG10(22) restituisce 1,34242268082221, che è il logaritmo in base 10 di 22.

MCD(Intero1; Intero2; ...; Intero30)
Restituisce il massimo comune divisore dei numeri interi inseriti. Se non si tratta di numeri interi la parte decimale viene troncata. Il numero massimo degli interi che si possono inserire è 30. I parametri possono essere inseriti anche come intervallo di celle indicando la cella iniziale e quella finale dell'intervallo divise dall'operatore **:**.
Esempio:

=MCD(16;28;32) restituisce 4
=MCD(A1;A2;A3), se in A1, A2 e A3 vi sono rispettivamente i valori 3, 5 e 8, restituisce 1

MCM(Intero1: Intero2; ...; Intero30)
Restituisce il minimo comune multiplo dei numeri interi inseriti. Se non si tratta di numeri interi la parte decimale viene troncata. Il numero massimo degli interi che si possono inserire è 30. I parametri possono essere inseriti anche come intervallo di celle indicando la cella iniziale e quella finale dell'intervallo divise dall'operatore **:**.
Esempio:
=MCM(2;5;7) restituisce 70

PI.GRECO()
Restituisce il valore della costante π con la precisione di 15 cifre (14 decimali). Ricordiamo che, per vedere tutti i 14 decimali occorre predisporre la cella a contenere un numero con 14 decimali (a cella selezionata, con il menu FORMATO -> CELLE o con click destro -> FORMATTA CELLE apriamo la finestra di dialogo per la formattazione e, nella scheda NUMERI, inseriamo 14 nella finestrella POSIZIONI DECIMALI). Se non facciamo questo, per default il foglio di calcolo scrive il risultato con 10 cifre decimali, arrotondando l'ultima.
Esempio:
=PI.GRECO() senza avere formattato la cella ritorna 3,1415926536
=PI.GRECO() avendo formattato la cella a 14 decimali restituisce 3,14159265358979

POTENZA(N; n)
Restituisce la potenza ennesima di N. E' come dire N^n.
Esempio:
=POTENZA(3;2) restituisce 9

PRODOTTO(N1; N2; ...; N30)
Restituisce il prodotto dei numeri inseriti, massimo 30. I parametri possono essere inseriti anche come intervallo di celle indicando la cella iniziale e quella finale dell'intervallo divise dall'operatore **:**.
Esempio:
=PRODOTTO(5;7;2) restituisce 70

QUOZIENTE(dividendo; divisore)
Restituisce la parte intera della divisione. E' come dire INT(dividendo/divisore)
Esempio:
=QUOZIENTE(5;2) restituisce 2

RADQ(N)
Restituisce la radice quadrata di N.
Esempio:
=RADQ(75) restituisce 8,66025403784439

RESTO(dividendo; divisore)
Restituisce il resto di una divisione fra interi. Dal momento che la funzione è implementata come $dividendo - divisore * INT(dividendo/divisore)$ fornisce un risultato anche se i numeri inseriti non sono interi, risultato che ha un significato molto relativo.
Esempio:
=RESTO(13;3) restituisce 1
=RESTO(13,5;5,2) restituisce 3,1

SOMMA(N1; N2; N3;...)
Restituisce la somma dei numeri indicati. Questa funzione può essere inserita cliccando sul pulsante con l'icona Σ nella barra degli strumenti. I parametri possono essere inseriti anche come intervallo di celle indicando la cella iniziale e quella finale dell'intervallo divise dall'operatore **:**.

2.3.3 Funzioni trigonometriche

Come aperitivo, visto la stretto legame, ricordo le due funzioni attraverso le quali possiamo trasformare gradi in radianti e viceversa.

GRADI(N)
Converte radianti in gradi. N è espresso in radianti.
Esempio:
=GRADI(PI.GRECO()/2) restituisce 90

RADIANTI(N)
Converte gradi in radianti. N è espresso in gradi.
Esempio:
=RADIANTI(180) restituisce 3,14159265358979

Le formule trigonometriche dirette del foglio di calcolo presuppongono che il parametro sia espresso in radianti. Se vogliamo usare gradi dobbiamo inserire come parametro RADIANTI(N) ed esprimere N in gradi. Esse sono le seguenti.

SEN(N)
Restituisce il seno trigonometrico di un angolo di N radianti.
Esempio:
=SEN(PI.GRECO()/2) restituisce 1
=SEN(RADIANTI(90)) restituisce 1

COS(N)
Restituisce il coseno trigonometrico di un angolo di N radianti.
Esempio:
=COS(PI.GRECO()/2) restituisce 0
=COS(RADIANTI(90)) restituisce 0
Può accadere che il risultato non sia proprio uno zero pulito ma contenga qualche cosa verso la diciassettesima cifra decimale. Ciò è dovuto all'arrotondamento del valore di π nel calcolo. Per avere lo zero pulito possiamo scrivere =ARROTONDA(COS(PI.GRECO()/2).

TAN(N)
Restituisce la tangente trigonometrica di un angolo di N radianti.
Esempio:
=TAN(PI.GRECO()/4) restituisce 1

COSEC(N)
Restituisce la cosecante trigonometrica di un angolo di N radianti. La cosecante di un angolo è il reciproco del seno dell'angolo, cioè equivale a 1/SEN(N).

SEC(N)
Restituisce la secante trigonometrica di un angolo di N radianti. La secante di un angolo è il reciproco del coseno dell'angolo, cioè equivale a 1/COS(N).

COT(N)
Restituisce la cotangente trigonometrica di un angolo di N radianti. La cotangente di un angolo è il reciproco della tangente dell'angolo, cioè equivale a 1/TAN(N).

Vi sono poi le funzioni trigonometriche inverse, che hanno come parametro il valore di una funzione trigonometrica (che può essere solo un valore tra 0 e 1, estremi compresi) e restituiscono l'angolo che l'ha generato, espresso in radianti. Se vogliamo il risultato espresso in gradi dobbiamo inserire la funzione inversa come parametro nella funzione GRADI(). Queste funzioni, nelle quali, rammentiamo, $0 \leqq N \leqq 1$, sono le seguenti.

ARCSEN(N)
Restituisce l'angolo, espresso in radianti, che ha per seno N.
Esempio:
=ARCSEN(1) restituisce 1,5707963268, cioè $\pi/2$
=GRADI(ARCSEN(1)) restituisce 90, cioè l'equivalente in gradi di $\pi/2$ radianti.

ARCCOS(N)
Restituisce l'angolo, espresso in radianti, che ha per coseno N.
ARCTAN(N)
Restituisce l'angolo, espresso in radianti, che ha per tangente N.

Esiste, infine, questa funzione utile per determinare, in termini di angolo, la pendenza di una retta passante per l'origine del piano cartesiano.

ARCTAN.2(x; y)
Restituisce l'angolo, espresso in radianti, tra l'asse delle ascisse in un piano cartesiano e la retta che dall'origine passa per il punto di coordinate x e y.
Esempio:
=ARCTAN.2(2;2) restituisce 0,7853981634
=GRADI(ARCTAN.2(2;2)) restituisce 45

2.3.4 Funzioni iperboliche

Mentre le funzioni trigonometriche sono riconducibili alla circonferenza di raggio unitario centrata sull'origine del piano cartesiano e il loro parametro è costituito da un angolo, le funzioni iperboliche sono riconducibili all'iperbole equilatera unitaria centrata sull'origine del piano cartesiano ed avente come asintoti le rette bisettrici dei quadranti e il loro parametro è costituito dall'area di un settore iperbolico.

La differenza è illustrata nella figura 5.

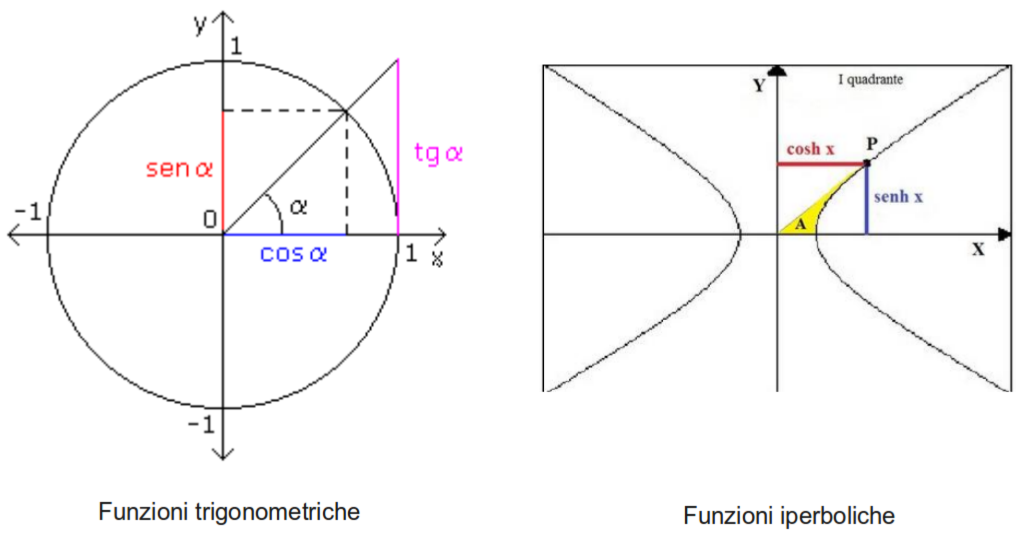


Figura 5: Differenza tra funzioni trigonometriche e funzioni iperboliche

A differenza delle funzioni trigonometriche, che sono usate da comuni mortali che abbiano a che fare con problemi di triangoli, le funzioni iperboliche sono cose da raffinati matematici o architetti estremi. Per esempio il coseno iperbolico interviene nell'equazione della curva catenaria, curva che rappresenta una corda sospesa per due estremità e sottoposta all'azione della sola forza di gravità. Cose utili per progettare elettrodotti, cupole e ponti.

Il foglio di calcolo è dotato di formule prefabbricate che calcolano i valori di queste funzioni e le chiama con gli stessi nomi delle funzioni trigonometriche aggiungendo una h, come peraltro si fa in matematica.

Abbiamo pertanto le funzioni dirette SENH(N), COSH(N), TANH(N), COSECH(N), SECH(N) e COTH(N), dove N non è più un angolo ma un numero che rappresenta un'area, e le funzioni inverse ARCSENH(N), ARCCOSH(N) e ARCTANH(N), dove N non è più un valore compreso tra 0 e 1, come avveniva nelle funzioni trigonometriche, ma è un numero che non ha queste limitazioni. Dal momento che il valore restituito da queste funzioni indirette non è, come avveniva nelle funzioni trigonometriche, un angolo e non ha niente a che vedere con gli archi, i matematici puristi preferiscono nominare le tre funzioni inverse arsenh, arcosh e artanh, sostituendo alle tre iniziali arc, che richiamano l'arco, le due iniziali ar, che richiamano l'area, che è la natura del valore restituito da queste funzioni. Ma per usare il foglio di calcolo dobbiamo inserire i nomi che ho detto prima.

Qualche esempio.

=SENH(0) restituisce 0, infatti, se l'area gialla della figura 3.1 si annulla, si annulla pure la funzione senh
=COSH(0) restituisce 1, infatti, se l'area gialla della figura 3.1 si annulla, la funzione cosh diventa 1 (iperbole unitaria)
=ARCSENH(0) restituisce 0, infatti l'area corrispondente a senh=0 è nulla
=ARCCOSH(1) restituisce 0, infatti l'area corrispondente a cosh=1 è nulla

3 Le basi della statistica descrittiva

La statistica descrittiva è la branca della Statistica che si occupa di descrivere efficacemente masse di dati attraverso tabelle e grafici e di sintetizzare le informazioni attraverso indici matematici.

Di tabelle e grafici ci occuperemo in altri capitoli.

In questo capitolo vediamo cosa ci offre il foglio di calcolo in materia di indicatori sintetici.

3.1 Dati disposti in serie (elenchi)

I dati sono in serie se sono contenuti, a mo' di elenco, in una colonna del foglio di calcolo. Possiamo avere serie di dati che elencano le temperature rilevate alle otto del mattino in tutti i giorni di un mese, una serie di dati che elencano l'altezza degli alunni di una qualsiasi classe di una scuola, ecc.

Indicatori sintetici di questi dati possono essere le medie, il campo di variazione, e la variabilità.

Le funzioni preconfezionate nel foglio di calcolo per determinare questi indicatori sono quelle elencate qui di seguito.
Per tutte avverto che l'introduzione dei parametri può avvenire in tre modi:

- il modo più scomodo, avendo spesso a che fare con lunghi elenchi di dati, è quello di indicare ciascun valore da assoggettare al calcolo, separato dal successivo con un **;**. Questo modo non si applica alle funzioni per i quartili e i percentili,
- indicando la zona[4] che contiene i valori, o selezionandola con il mouse o scrivendo la cella iniziale e quella finale separate da **:**,
- indicando il nome della zona che contiene i valori, dopo averla battezzata con un nome identificativo. Il battesimo avviene selezionando la zona e agendo da menu DATI -> DEFINISCI AREA... .

Campo di variazione

MIN(N1; N2; ...)
Restituisce il valore minimo di un elenco.

MAX(N1; N2; ...)
Restituisce il valore massimo di un elenco.

[4]Comunemente, e al fine di non crearci inutili complicazioni, la zona che contiene i valori dovrebbe essere una colonna del foglio di calcolo. E' comunque possibile elencare i valori anche per riga o addirittura in maniera matriciale (colonna che prosegue su altra colonna, ecc.). Indicando gli indirizzi di cella estremi estendiamo i calcoli a tutti i dati contenuti tra queste celle estreme. Attenzione, tuttavia, soprattutto nelle disposizioni matriciali alle eventuali celle vuote, non vuote perché contengono un dato nullo ma vuote perché inutilizzate: sia in un caso che nell'altro, infatti, il foglio le utilizzerebbe nei calcoli, sfalsando tutti i risultati.

Valori medi

MEDIA(N1; N2; ...)
Restituisce la media dei valori indicati.

MEDIA.ARMONICA(N1; N2; ...)
Restituisce la media armonica dei valori indicati.

MEDIA.GEOMETRICA(N1; N2; ...)
Restituisce la media geometrica dei valori indicati.

MEDIANA(N1; N2; ...)
Restituisce la mediana dei valori indicati.

MODA(N1; N2; ...)
Restituisce la moda dei valori indicati. Dal momento che la moda è il valore più ricorrente della serie, la funzione restituisce un errore se la serie stessa è composta di valori tutti diversi uno dall'altro.

Variabilità

QUARTILE(area; tipo)
Restituisce il quartile di una serie di dati.
Il parametro "area" è la zona che contiene la serie di dati; il parametro "tipo" può essere 0 (valore minimo), 1 (primo quartile, che contiene il 25% dei dati), 2 (secondo quartile, che contiene il 50% dei dati e corrisponde alla mediana), 3 (terzo quartile, che contiene il 75% dei dati) e 4 (valore massimo).

PERCENTILE(area; alfa)
Restituisce il percentile di una serie di dati.
E' praticamente la generalizzazione del concetto di quartile: quest'ultimo lavora su suddivisioni per quarti (25%, 50% e 75%) della serie, mentre il percentile lavora su suddivisione qualsiasi.
Il parametro "area" è la zona che contiene i dati; il parametro "alfa", accettato per valori compresi tra 0 e 1, rappresenta la percentuale di suddivisione della serie e può essere indicato come numero decimale (0,10 per indicare 10%) oppure come percentuale (10% per indicare 10%).
Esempio:
=PERCENTILE(A1:A20; 50%) equivale a =QUARTILE(A1:A20; 2) e indica il valore mediano
=PERCENTILE(A1:A20; 30%) indica il valore al di sotto del quale abbiamo il 30% dei valori

VAR(N1; N2; ...)
Restituisce la varianza campionaria, calcolata, cioè, su un insieme di valori ristretto (campione) ritenuto rappresentativo di un insieme più vasto (universo): nel qual caso si considera nel denominatore della formula di calcolo un numero di elementi inferiore di 1 al numero effettivo.

VAR.POP(N1; N2; ...)Restituisce la varianza di un insieme di valori ritenuto universale, cioè non rappresentativo di uno più vasto, ma esaustivo per sé stesso.

DEV.ST(N1; N2; ...)
Restituisce la deviazione standard campionaria.
Altro non è che la radice quadrata di VAR.

DEV.ST.POP(N1; N2; ...)
Restituisce la deviazione standard di una serie di dati.
Altro non è che la radice quadrata di VAR.POP.

3.2 Dati rappresentati in seriazione

Come vedremo parlando di tabelle e grafici, a volte i dati, per renderli meglio leggibili e interpretabili, non si trovano semplicemente elencati, ma vengono esposti in modo da evidenziare quali si ripetono più volte di altri; spesso la ripetizione (che in Statistica si chiama frequenza) viene esposta con riferimento a raggruppamenti di dati (che in Statistica si chiamano classi).

Le tre possibilità sono illustrate nella figura 6, che contiene i risultati della rilevazione della statura in centimetri degli alunni di una classe V di scuola superiore.

	A	B	C	D	E	F	G
1	valori		valore	frequenza		classe	frequenza
2	171		160	1		fino a 160	1
3	169		165	2		161-165	2
4	182		169	1		166-170	1
5	190		171	2		171-175	5
6	181		172	2		176-180	2
7	171		174	1		181-185	7
8	182		176	1		186-190	1
9	183		179	1		oltre 190	1
10	185		181	2			
11	165		182	3			
12	172		183	1			
13	182		185	1			
14	160		190	1			
15	191		191	1			
16	165						
17	172						
18	174						
19	176						
20	179						
21	181						
22							

Figura 6: Statura in centimetri degli alunni di una V superiore

La prima modalità di rappresentazione dei dati è l'elencazione nella colonna A del foglio, in cui i dati si susseguono così come sono stati rilevati.
La seconda modalità è quella in cui a ciascun valore rilevato corrisponde il numero dei casi, cioè la frequenza.
La terza modalità è quella in cui la frequenza viene fatta corrispondere a classi di appartenenza dei valori rilevati.

Tutto ciò che abbiamo visto nel paragrafo precedente si applica alla prima modalità.

Se i dati sono disponibili nella seconda modalità, il foglio di calcolo non ci offre alcuna formula preconfezionata per calcolare gli indicatori statistici che abbiamo visto.
Abbiamo due strade per fare questi calcoli:

- ricostruire a ritroso l'elenco dei dati, scrivendo in colonna una volta 160, due volte 165, una volta 169, ecc., in modo da ricostruire, sia pure con un diverso ordine, il contenuto della colonna A e poi applicare a questa le funzioni viste nel paragrafo precedente;

- calcolare i nostri indicatori nel foglio di calcolo ricorrendo agli operatori aritmetici di base.

La media dei dati, per esempio, può essere calcolata aggiungendo, nella colonna E del foglio rappresentato nella figura 6, i prodotti tra il contenuto delle celle di colonna C e di colonna D per poi dividere la somma dei dati di colonna E per la somma dei dati di colonna D.
Allo stesso modo, sapendo che la deviazione standard è la media quadratica degli scarti dalla media aritmetica, possiamo calcolare anche questo indicatore utilizzando gli operatori aritmetici nei punti giusti, aiutati comunque dal foglio di calcolo: sempre meglio che fare tutto a mano, come si faceva prima che ci fossero i PC.

Se i dati sono disponibili nella terza modalità non è possibile alcun calcolo esatto. né in un modo né nell'altro. Se vogliamo, possiamo approssimare il calcolo degli indicatori facendo corrispondere alle frequenze il valore centrale delle classi ed agire come indicato per la seconda modalità.

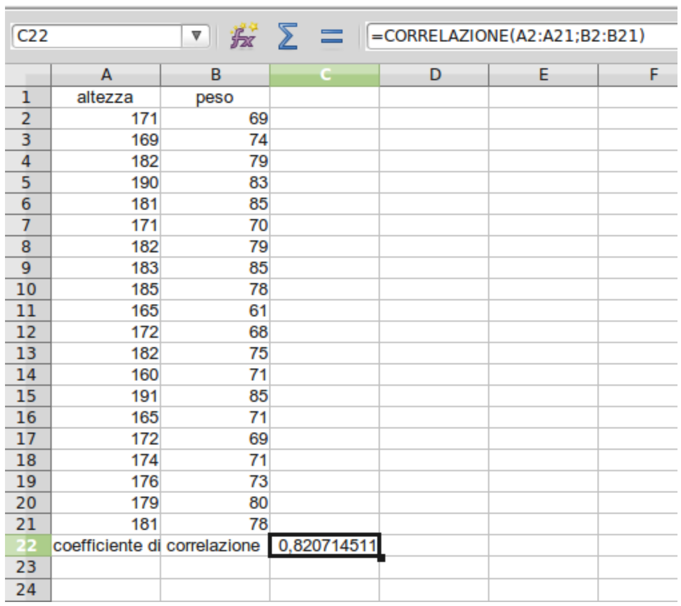
3.3 Correlazione tra dati

Si ha correlazione statistica quando alla variazione di una certa variabile corrisponde una variazione simile di un'altra variabile. Senza necessariamente pensare ad un rapporto causa-effetto, matematicamente esprimibile in una relazione funzionale, la statistica descrittiva si limita a constatare se e in quale grado esista una correlazione. All'uopo si utilizza il coefficiente di correlazione di Pearson, che assume valori tra -1 (correlazione piena inversa) e 1 (correlazione piena diretta) passando per valori attorno allo 0 (nessuna correlazione).

Il foglio di calcolo contiene una funzione preconfezionata per il calcolo di questo indicatore.

CORRELAZIONE(dati1; dati2)
Restituisce il coefficiente di correlazione.
I parametri sono due elenchi di dati in corrispondenza tra loro.

La figura 7 ci mostra un esempio nel quale all'elenco dell'altezza in centimetri degli alunni della V classe del precedente esempio è accostato l'elenco del loro peso in chilogrammi.


C22 =CORRELAZIONE(A2:A21;B2:B21)

	A	B	C	D	E	F
1	altezza	peso				
2	171	69				
3	169	74				
4	182	79				
5	190	83				
6	181	85				
7	171	70				
8	182	79				
9	183	85				
10	185	78				
11	165	61				
12	172	68				
13	182	75				
14	160	71				
15	191	85				
16	165	71				
17	172	69				
18	174	71				
19	176	73				
20	179	80				
21	181	78				
22	coefficiente di	correlazione	0,820714511			
23						
24						

Figura 7: Correlazione tra altezza e peso di alunni di una classe scolastica

Il coefficiente di correlazione, calcolato inserendo la formula che si vede nella zona di immissione, risulta 0,82, ad indicare l'esistenza di una correlazione, anche se non molto elevata.

4 Tabelle e conti

Abbiamo già detto che il più banale uso che si può fare del foglio di calcolo è quello di redigere tabelle da stampare, ben disposte grazie alle varie possibilità che ci sono offerte di formattare i dati, di scegliere i caratteri, i colori, ecc.

Per come si facciano queste cose di formattazione e abbellimento rimando alla guida di cui è dotato il foglio.

Vedremo, invece, in un altro capitolo, come da queste tabelle sia possibile trarre grafici per visualizzare altrimenti ed in modo più avvincente e comprensibile il loro contenuto.

In questo capitolo ci occupiamo di vedere quali elaborazioni il foglio di calcolo ci dia modo di effettuare su tabelle.

Le elaborazioni consistenti in calcoli le abbiamo viste nei precedenti capitoli 2 e 3.

Qui vediamo come si possano estrarre dati, anche parziali, dalle tabelle, come si possano creare tabelle riepilogative e come il foglio di calcolo ci consenta di creare un vero e proprio database, anche se elementare e non certo paragonabile, in efficienza, ad un database relazionale[5].

4.1 Estrazione di dati attraverso il filtraggio

La tabella che vediamo nella figura 8 rappresenta la lista delle spese effettuate nella settimana che va dal 9 al 15 maggio.

	A	B	C	D
1	data	spesa	importo	pagamento
2	09/05/16	vestiario	230,00	carta
3	09/05/16	alimentari	28,75	contanti
4	09/05/16	libri, riviste, giornali	45,00	bancomat
5	09/05/16	condominio	728,00	bonifico
6	09/05/16	alimentari	75,32	carta
7	10/05/16	divertimento	24,00	contanti
8	10/05/16	vestiario	28,50	bancomat
9	10/05/16	libri, riviste, giornali	3,00	contanti
10	11/05/16	alimentari	32,00	bancomat
11	11/05/16	libri, riviste, giornali	1,50	contanti
12	12/05/16	benzina, autostrada	80,00	bancomat
13	12/05/16	libri, riviste, giornali	3,00	contanti
14	12/05/16	ristorante	120,00	carta
15	13/05/16	assicurazione auto	1.324,00	bonifico
16	13/05/16	alimentari	10,40	contanti
17	13/05/16	libri, riviste, giornali	8,50	contanti
18	13/05/16	alimentari	1,25	contanti
19	14/05/16	libri, riviste, giornali	7,00	contanti
20	14/05/16	alimentari	85,80	carta
21	14/05/16	ristorante	140,00	carta
22	15/05/16	divertimento	80,00	bancomat
23	15/05/16	libri, riviste, giornali	3,00	contanti
24	15/05/16	benzina, autostrada	8,00	bancomat
25				
26				

Figura 8: Lista delle spese

Essa contiene la data, la tipologia della spesa, l'importo e il mezzo di pagamento usato.

Ciò che faremo con questa tabella esemplificativa, molto piccola, dato lo spazio disponibile, potrà sembrare banale: ma se immaginiamo il tutto riferito a una tabella non più relativa a una settimana ma a un mese o a un anno e non più concentrata su poche righe ma diffusa su più fogli ne comprendiamo meglio l'utilità.

L'estrazione di dati parziali dalla tabella può avvenire con lo strumento Filtro, raggiungibile dal menu Dati. Ci vengono proposti tre tipi di filtro: il Filtro automatico, il Filtro standard e il Filtro speciale.

Filtro automatico

Con il cursore del mouse posizionato in un punto qualsiasi della tabella scegliamo dalla barra del menu Dati -> Filtro -> Filtro automatico.

La riga contenente l'intestazione delle colonne della nostra tabella di figura 8 assume il seguente aspetto

	A	B	C	D
1	data ▾	spesa ▾	importo ▾	pagament ▾
2	09/05/16	vestiario	230,00	carta

Nelle celle contenenti le intestazioni delle colonne compare un pulsante con un simbolo di freccia giù, premendo sul quale, per ciascuna delle colonne, si apre un menu a discesa in cui possiamo selezionare la voce in riferimento alla quale desideriamo estrarre i dati.

Se premiamo sul pulsante contenuto nell'intestazione della colonna "spese" e selezioniamo la voce "alimentari" la nostra tabella di figura 8 assume il seguente aspetto

[5] Le suite Office, oltre al foglio di calcolo, contengono un modulo per la creazione e la gestione di database relazionali: quello di Libre Office si chiama Base.

	A	B	C	D
1	data	spesa	importo	pagamen
3	09/05/16	alimentari	28,75	contanti
6	09/05/16	alimentari	75,32	carta
10	11/05/16	alimentari	32,00	bancomat
16	13/05/16	alimentari	10,40	contanti
18	13/05/16	alimentari	1,25	contanti
20	14/05/16	alimentari	85,80	carta
25				

e si limita ad esporci le righe della tabella che riguardano le sole spese in alimentari.
Se ci interessa, possiamo copiare questa sottotabella, selezionandola con il mouse, e incollarla dove ci può interessare, per esempio su un altro foglio, per riprodurla a stampa, rimemorizzarla, farci dei conteggi, ecc.

Sono possibili selezioni multiple. Se, per esempio vogliamo estrarre solo le spese alimentari pagate in contanti basta che selezioniamo "alimentari", come fatto prima, dalla colonna "spese" e poi, con lo stesso procedimento, selezioniamo "contanti" dalla colonna "pagamenti".

Per tornare alla tabella originaria dal menu Dati -> Filtro si seleziona Rimuovi filtro.

Per rimuovere i pulsanti del filtro nelle caselle di intestazione basta riselezionare Filtro Automatico nel menu Dati -> Filtro.

Filtro standard

Il filtro standard ci consente di affinare l'estrazione dei dati in maniera molto più spinta di quanto ci consenta il filtro automatico visto prima.

Posizionati su un qualsiasi cella della tabella, da menu Dati -> Filtro selezioniamo Filtro standard... e ci troviamo di fronte la finestra riprodotta in figura 9.

Figura 9: Finestra di dialogo per il filtro standard

Ad esemplificare un tipo di estrazione che non sarebbe stato possibile con il filtro automatico, la condizione che vediamo inserita è che l'importo sia maggiore di 500.
E il risultato che otteniamo dando OK è il seguente

	A	B	C	D
1	data	spesa	importo	pagamento
5	09/05/16	condominio	728,00	bonifico
15	13/05/16	assicurazione auto	1.324,00	bonifico
25				

Se esprimiamo più condizioni, utilizzando le finestrelle che vediamo sotto quelle compilate, dobbiamo anche scegliere nella finestrella Operatore l'operatore logico E o O.

Filtro speciale

Questa opzione ci consente di creare filtri con la stessa raffinatezza dell'opzione filtro standard, con il vantaggio di poter memorizzare i filtri nel foglio dove è presente la tabella in modo da poterli richiamare, alla bisogna, senza riscriverli.

Per fare questo è necessario ripetere, con copia e incolla, in una zona del foglio che contiene la tabella la riga delle intestazioni delle colonne e, nelle righe sottostanti, inserire nelle caselle le condizioni di filtraggio, sapendo che condizioni scritte sulla stessa riga comportano l'operatore logico E, cioè richiedono di essere verificate tutte insieme, mentre condizioni scritte su righe diverse comportano l'operatore logico O, cioè richiedono di essere verificate alternativamente.

Per la solita lista delle spese di figura 8 possiamo creare i seguenti due filtri nella zona a destra della tabella

F	G	H	I
data	spesa	importo	pagamento
	alimentari	>50	
data	spesa	importo	pagamento
	alimentari		
	vestiario		

Il primo tende all'estrazione delle spese alimentari di importo superiore a 50: stessa riga, operatore logico E, cioè le due condizioni devono ricorrere entrambe, insieme. Il risultato sarà il seguente:

	A	B	C	D
1	data	spesa	importo	pagamento
6	09/05/16	alimentari	75,32	carta
20	14/05/16	alimentari	85,80	carta

Il secondo tende all'estrazione sia delle spese alimentari sia delle spese di vestiario: righe diverse, operatore logico O, cioè basta che ricorra l'una o l'altra delle condizioni. Il risultato sarà l'elencazione di tutte le spese in alimentari e in vestiario.
Ovviamente i termini utilizzati per esprimere le condizioni devono essere rigorosamente quelli usati nella tabella. Se nella tabella abbiamo messo "vestiario" non possiamo mettere nelle condizioni "vestiti".

L'attivazione delle nostre condizioni per arrivare al risultato avviene da menu Dati -> Filtro -> Filtro speciale, col che si apre la seguente finestra di dialogo

nella quale dobbiamo inserire, nella casella ove è presente il cursore, la selezione della zona del foglio che contiene i criteri che vogliamo applicare.

4.2 Tabelle pivot

La figura 10 all'inizio della pagina seguente mostra una tabella riepilogativa delle nostre spese elencate nella figura 8.

Per ogni riga abbiamo la voce di spesa e, nelle colonne, abbiamo gli importi spesi complessivamente in riferimento a ciascuna voce, suddivisi per mezzo di pagamento utilizzato. Nella colonna finale "Totale Risultato" abbiamo i totali spesi per ciascuna voce di spesa e nella riga finale "Totale

	A	B	C	D	E	F
1	Filtro					
2						
3	Somma - importo	pagamento				
4	spesa	bancomat	bonifico	carta	contanti	**Totale Risultato**
5	alimentari	32,00		161,12	40,40	**233,52**
6	assicurazione auto		1.324,00			**1.324,00**
7	benzina, autostrada	88,00				**88,00**
8	condominio		728,00			**728,00**
9	divertimento	80,00			24,00	**104,00**
10	libri, riviste, giornali	45,00			26,00	**71,00**
11	ristorante			260,00		**260,00**
12	vestiario	28,50		230,00		**258,50**
13	**Totale Risultato**	**273,50**	**2.052,00**	**651,12**	**90,40**	**3.067,02**
14						
15						
16						

Figura 10: Riepilogo delle spese

Risultato" abbiamo i totali spesi per ciascun mezzo di pagamento. La cella in angolo in fondo a destra contiene il totale speso.

Questa, nel gergo dei fogli di calcolo, è chiamata tabella pivot.

L'origine di questo nome non è nota: la mia idea personale è che si chiami così perché, facendo perno (in francese pivot) su un dato numerico, il foglio di calcolo rielabora una tabella riferendo il dato numerico alle colonne ed alle righe che si incrociano su di lui: tanto più che la tabella pivot non si costruisce - o, comunque, non fornisce un risultato sensato - se non in presenza di dati numerici.

Per costruire una tabella pivot occorre avere una tabella di partenza, tipo quella di figura 8.

Da menu Dati -> Tabella pivot si sceglie Crea: con questa azione vediamo che la nostra tabella di partenza appare interamente selezionata e si apre una finestra nella quale ci viene proposta l'opzione Selezione attuale e accettiamo con OK. L'alternativa Sorgente dati registrata in Libre Office ci offre la possibilità di creare la tabella pivot partendo da una tabella di un database esterno al foglio di calcolo, materia cui accenneremo nel prossimo paragrafo 4.4.

Con l'OK si apre la finestra di dialogo riprodotta nella figura 11.

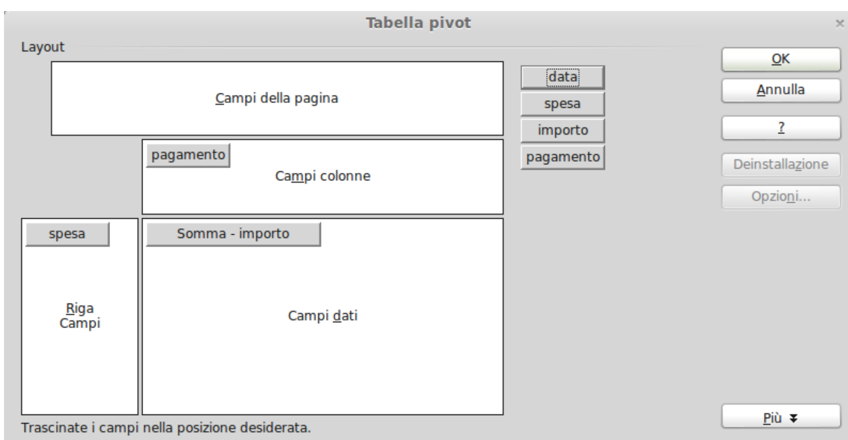


Figura 11: Finestra di dialogo per la creazione di una tabella pivot

Quella che vediamo è la finestra compilata per ottenere la tabella di figura 10: infatti abbiamo inserito nella zona Campi colonne il campo "pagamento", nella zona Riga campi il campo "spesa" e nella zona Campi dati la voce Somma - importo: che sono esattamente le cose che compaiono nella tabella pivot realizzata. Dando OK, nel foglio successivo a quello dove abbiamo lavorato, ci si presenta la tabella pivot.

Vediamo che i campi della nostra tabella sono evidenziati nella finestra come oggetti grafici, tipo pulsante, ed è per trascinamento con il mouse di questi nelle zone Campi colonne e Riga campi che li scegliamo per costruire la tabella.

Per quanto riguarda la zona Campi dati, che, ricordiamo, può contenere solo campi numerici affinché la tabella pivot possa avere un senso, vi è stato trascinato l'oggetto grafico "importo" e, per default, ce ne viene proposta la somma. Se desideriamo qualche cosa di diverso dalla somma, con doppio click sull'oggetto grafico Somma - importo comparso per default apriamo un menu a discesa che ci propone un'ampia scelta di alternative: dal semplice conteggio, alla media, alla deviazione standard, ecc.

Tornando alla tabella pivot di figura 10 notiamo la presenza, nella prima casella in alto a sinistra, del pulsante Filtro. Agendo su di esso apriamo una finestra di dialogo, in tutto simile a quella del filtro standard riprodotta nella figura 9, attraverso la quale possiamo esprimere delle condizioni di filtraggio dei dati da inserire nella tabella pivot. Ciò anche utilizzando campi non contenuti nella tabella stessa ma contenuti nella tabella originaria: se, per esempio, scegliessimo campo data = 9/5/2016, anche se la tabella pivot non contiene un campo data, la nostra tabella pivot si ricomporrebbe mostrandoci solo i dati relativi alle spese effettuate il 9 maggio.

Altre possibilità di filtraggio ci sono offerte dai menu che si aprono cliccando sui pulsanti con freccia giù che compaiono nelle intestazioni delle colonne e delle righe della tabella pivot.

4.3 Tabelle database

Un database, nella sua più semplice concezione, altro non è che una tabella in cui le righe si chiamano record e le colonne si chiamano campi. Generalmente un record contiene nel suo primo campo l'identificativo di una cosa e, nei campi successivi, sono inseriti attributi vari riferibili a quella cosa.

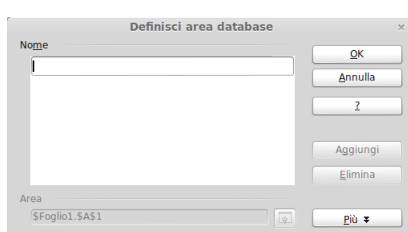
Una rubrica che contiene i numeri telefonici e gli indirizzi di una serie di persone è un database nel quale ogni record identifica una persona e contiene il suo numero telefonico e il suo indirizzo.

Se il database non contiene valori numerici assoggettabili ragionevolmente a operazioni matematiche (e, per esempio, non lo sono i numeri telefonici), avere il database come tabella di un foglio di calcolo ha poco senso: giusto avere un elenco in un posto non avendo trovato o non avendo saputo trovare altro posto dove metterlo. Un'utilità che ci può indirettamente fornire il foglio di calcolo è la funzione raggiungibile da menu Modifica -> Trova... che ci consente, per esempio, di trovare il record contenente il numero telefonico di Rossi Eugenio. Altra utilità, sempre nel caso di una rubrica telefonica, sarebbe quella di dare un ordine alfabetico al nostro elenco di nomi da menu Dati -> Ordina... .

La nostra lista delle spese di figura 8 potrebbe essere vista come un database: ogni record ci dice come e quando è stata fatta una certa spesa e per quale importo, cose che troviamo nei vari campi.

Per trasformarla in database dobbiamo battezzarla, cioè identificarla con un nome e, nel farlo, ci dobbiamo anche preoccupare di prevedere lo spazio per contenere i record per le spese che faremo in futuro.

Collochiamoci pertanto nella prima cella in alto a sinistra della tabella e da menu Dati -> Definisci area apriamo la finestra Definisci area database che appare come segue.



Inseriamo il nome che vogliamo dare al database, ad esempio, “spese”.

Se siamo partiti dalla finestra contenente la nostra tabella delle spese, nella finestrella Area troviamo indicata la selezione corrispondente alla tabella attuale ($A$1:$D$24)e, per avere spazio per registrare anche spese future dobbiamo modificare l’indirizzo della tabella finale della selezione in modo da contenere molte altre righe. A questo scopo mettiamo, per esempio, 3000 al posto del 24 dell’indirizzo della cella finale e avremo a disposizione un database che può contenere fino a 3000 record. Bene comunque verificare periodicamente la capienza del database, da menu Dati -> Seleziona area scegliendo il nome della nostra area nella finestra di dialogo che compare e controllando che tutti i record siano compresi nell’area che compare di colore leggermente più scuro del resto del foglio (area selezionata). Se ciò non fosse dovremmo ridefinire l’area, con procedimento analogo a quello seguito per la prima definizione, in modo che li comprenda.

Già tutta questa manfrina ci dimostra che il mestiere del foglio di calcolo non è quello di gestire database: infatti si chiama foglio di calcolo. Ma c’è purtroppo moltissima gente che si ostina a usarlo con questo scopo[6].

Fatto questo, il foglio di calcolo ci mette a disposizione funzioni, raggruppate nella categoria Database, che ci consentono di fare calcoli sulla tabella di database.

Dobbiamo però prima aver definito un’area dei criteri, nello stesso modo con cui lo abbiamo fatto per utilizzare il filtro speciale illustrato nel precedente paragrafo 4.1.
Copiamo di fianco alla tabella del database la riga di intestazione con il nome dei campi e nelle righe successive indichiamo i criteri. Per riferire i nostri calcoli alle sole spese alimentari dovremo indicare una cosa così

F	G	H	I
data	spesa	importo	pagamento
	alimentari		

Le funzioni che abbiamo a disposizione richiedono l’immissione di tre parametri: il nome del database, l’indirizzo della cella che contiene il nome del campo che ci interessa e il riferimento all’area dei criteri.

Con queste funzioni, il cui elenco possiamo trovare aprendo la Creazione guidata funzioni con un click sul pulsante nella barra degli strumenti, scegliendo poi la categoria Database, possiamo effettuare calcoli aritmetici (somma, prodotto) o statistici (media, varianza, ecc.) sui dati rispondenti ai criteri di selezione.

4.4 Importazione di tabelle da database esterni

LibreOffice, come i suoi omologhi OpenOffice e NeoOffice, oltre a contenere loro stessi un modulo per la creazione e la gestione di un database (il modulo Base) possono gestire anche database di altra natura e altrimenti creati (MySQL, SQLite, ecc.) collegandoli a questo stesso modulo.

Una volta che, attraverso il modulo Base, LibreOffice ha fatto proprio un database, questo può essere registrato nel modulo Calc (il modulo del foglio elettronico di cui ci stiamo occupando). Ciò può avvenire, una volta aperto il foglio di calcolo, premendo il tasto F4 della tastiera per aprire, subito sotto la barra degli strumenti, la zona dei collegamenti a database.
Con click destro nella finestra di sinistra di questa zona scegliamo Database registrati e con la finestra di dialogo che compare possiamo togliere o aggiungere i database che ci interessa poter vedere anche dal foglio di calcolo.

Dopo la registrazione il database comparirà nella zona dedicata, che si apre e si chiude con pressione del tasto F4, e da questa finestra sarà possibile richiamare nel foglio di calcolo tutte le

[6] Per le alternative disponibili nel mondo del software libero a questa brutta abitudine rimando al mio articolo Software libero per gestire dati, archiviato nella categoria Software libero del mio blog *www.vittal.it*.

tabelle che vogliamo del database per poterci fare i nostri calcoli, per utilizzarle per fare grafici, rapporti, ecc.

Come abbiamo accennato nel paragrafo 4.2, se abbiamo registrato il database, possiamo richiamarne la tabella da elaborare direttamente dalla finestra di dialogo per la progettazione della tabella pivot.

5 Grafici

Il foglio di calcolo contiene tutti gli strumenti necessari per tradurre in grafico qualsiasi tabella.

Questi strumenti sono molto potenti e non si limitano a dare una forma grafica alle quantità ed ai valori che contiene la tabella ma possono arricchire la visualizzazione grafica con l'aggiunta di indicatori (ad esempio percentuali di distribuzione) o, addirittura, con l'aggiunta dei risultati di analisi alquanto sofisticate (ad esempio disegno di linee interpolanti o di tendenza con indicazione delle relative equazioni).

5.1 Creazione guidata di grafici semplici

Cominciamo da una banalissima realizzazione in modo da familiarizzare anzitutto con lo strumento di base.

Abbiamo la seguente tabella, che contiene l'elenco delle spese sostenute da una famiglia in un anno.

	A	B
1	tipo di spesa	importo
2	Alimentari	14.800
3	Vestiario	2.750
4	Spese condominiali	4.120
5	Energia elettrica	940
6	Gas	287
7	Telefono fisso	839
8	Smartphones	235
9	Televisione	835
10	Auto	2.824
11	Divertimento	645
12	Ferie e viaggi	2.845
13	Contributi associativi e benefici	785
14	Spese mediche	1.127
15	Assicurazioni varie	235
16	Imposte	1.825
17		

Figura 12: Elenco delle spese in un bilancio familiare

Se vogliamo visualizzare meglio questo elenco, per esempio per avere una migliore percezione delle proporzioni tra una voce di spesa e l'altra possiamo ricavare dalla tabella un grafico a barre.

Per fare questo ci posizioniamo con il mouse in una qualsiasi casella appartenente alla tabella, per esempio nella casella A1 (sarebbe lo stesso se fosse la casella B9), e da menu INSERISCI scegliamo GRAFICO... (lo stesso che premere il pulsante con l'icona nella barra degli strumenti).

Immediatamente, subito a sinistra della nostra tabella, compare un grafico che, per default, è un istogramma a colonne, al quale è parzialmente sovrapposta la finestra di dialogo CREAZIONE GUIDATA GRAFICO e ci troviamo nella situazione illustrata nella figura 13 alla pagina seguente.

Nella finestra per la creazione guidata abbiamo l'elenco dei tipi di grafico che il nostro foglio può costruire e la prima cosa che possiamo fare è quella di scegliere un grafico più adatto di quello che ci viene proposto per default: quest'ultimo, infatti, porta sull'asse orizzontale i tipi di spesa i cui lunghi nomi si sovrappongono o non si vedono tutti. Se, al posto del grafico a colonne verticali, scegliamo

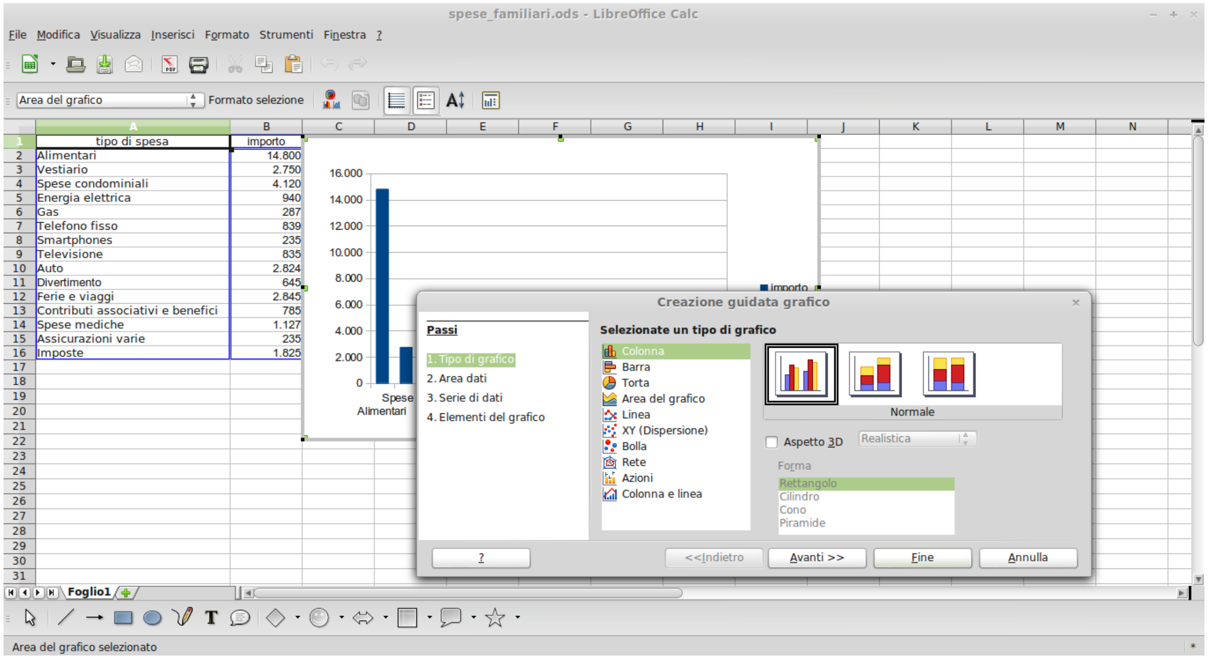


Figura 13: Creazione guidata di grafico sull'elenco delle spese

il grafico a barre orizzontali abbiamo sicuramente un risultato migliore: lo possiamo vedere subito cliccando sulla seconda voce dell'elenco, quello che identifica il grafico a barre.

A questo punto avremmo già un risultato accettabile e potremmo chiudere cliccando su Fine.

Quando infatti, come nel nostro caso, la tabella è composta da una prima colonna che contiene dati qualitativi (descrizioni) e una seconda colonna che contiene i corrispondenti dati quantitativi (valori numerici) la creazione guidata fa tutto lei.

Se clicchiamo su Avanti apriamo una finestra dedicata all'area dati, nella quale vediamo, scelta per default, l'area corrispondente alla nostra tabella, con l'indicazione che la prima riga e la prima colonna devono servire per le didascalie sugli assi. Per esercizio possiamo variare alcune scelte e vedere che cosa succede.

Cliccando nuovamente su Avanti apriamo una finestra dedicata all'intervallo dati personalizzato per ciascuna serie di dati, all'interno della quale vediamo specificate le varie zone della nostra tabella, quale dedicata ai valori, quali dedicate alle intestazioni (nome e categorie). Anche questa finestra può servire per modificare le scelte di default, che tuttavia, in condizioni normali, non sono da modificare.

Nuovo click su Avanti e apriamo l'ultima finestra di dialogo, dedicata a titoli, legenda e griglia. Qui possiamo utilmente inserire un titolo per il grafico, ad esempio "Ripartizione delle spese familiari nell'anno 2015" e, data la natura del grafico e l'assoluta inutilità della legenda, deselezionare questa opzione. Per quanto non indispensabile possiamo inserire una didascalia per l'asse Y "valori in euro": questo ci dà modo di acquisire il concetto che, nel grafico a barre orizzontali, abbiamo l'inversione degli assi rispetto al grafico a colonne verticali e l'asse delle Y non è più quello verticale ma è quello orizzontale.

Con click su Fine chiudiamo la finestra di dialogo per la creazione guidata e ci rimane il grafico sul foglio di calcolo, affiancato alla tabella dalla quale lo abbiamo derivato. Può accadere che le didascalie sull'asse verticale non compaiono tutte; in questo caso selezioniamo il grafico con semplice click in un punto qualsiasi della sua area, col che vedremo comparire lungo i bordi dell'area del grafico dei quadratini verdi che sono maniglie; andiamo con il mouse su quella centrale del confine inferiore e, con il puntatore che si sarà trasformato in doppia freccia, trasciniamo verso il basso la maniglia con premuto il pulsante sinistro del mouse fino a che compariranno tutte le didascalie.

Il grafico che abbiamo così creato è inserito nel foglio di calcolo come immagine a fianco della tabella dalla quale è stato generato e salvando il foglio di lavoro salviamo ovviamente anche il grafico.

Possiamo copiare il nostro grafico dove vogliamo, come immagine, con una procedura copia e incolla cliccando destro nell'area del grafico e scegliendo le voci adatte dal menu a discesa che si apre.

* * *

Ovviamente il grafico creato con la procedura sopra descritta deve poter essere editato, per miglioramenti, correzioni, modifiche, ecc.

Per fare questo dobbiamo aprire il file in cui lo abbiamo salvato insieme alla tabella e fare doppio click nell'area del grafico oppure cliccare destro in un punto qualsiasi dell'area del grafico e scegliere Modifica dal menu a discesa.

Il risultato di una di queste azioni è che tabella e grafico vengono selezionati e le voci di menu del foglio di calcolo Inserisci e Formato si apprestano al servizio del grafico e non più del foglio di calcolo.

Utilizzando queste voci possiamo intervenire a piacere.

Una cosa che vorremmo fare, per esempio, sarebbe di inserire nel grafico l'importo di ciascuna voce di spesa: esso, infatti, è approssimativamente leggibile dal grafico con l'aiuto della griglia verticale, ma ci piacerebbe vedere l'importo esatto.
Per ottenere questo scegliamo menu Inserisci -> Didascalia dati... e nella finestra di dialogo che si apre attiviamo l'opzione Mostra il valore come numero.

Ci piacerebbe anche che il grafico facesse risaltare la graduatoria di importanza delle voci di spesa.
Per ottenere questo basta che ordiniamo la tabella in tal senso: usciamo dalla modalità grafico cliccando in un punto qualsiasi fuori dall'area del grafico in modo che il menu ritorni quello del foglio di calcolo. Clicchiamo in un punto qualsiasi della tabella e da menu Dati scegliamo Ordina. Nella finestra di dialogo che compare scegliamo importo come Chiave di ordinamento 1, scegliamo l'opzione Crescente e diamo OK. Istantaneamente, sia la tabella sia il grafico si ordineranno di conseguenza: e questo ci dimostra che il grafico che abbiamo disegnato nel foglio di calcolo rimane sempre collegato alla tabella da cui deriva ed ogni variazione, di qualsiasi tipo, avvenga nella tabella si riflette immediatamente anche sul grafico.
Dopo questi interventi il nostro grafico apparirà come in figura 14.

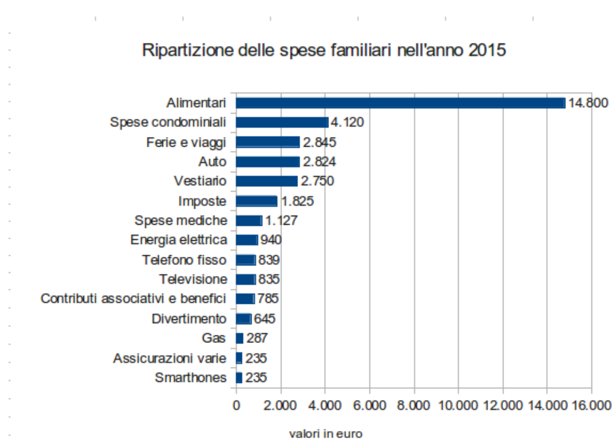


Figura 14: Grafico rielaborato sull'elenco delle spese

Al fine di avere ancor meglio la resa dell'effetto "ripartizione" possiamo anche pensare di trasformare il nostro grafico in un grafico a torta, con indicata la ripartizione percentuale delle spese di varia natura.
Basta riportare il menu al formato grafico (doppio click sinistro in un punto qualsiasi dell'area del grafico) e scegliere da menu FORMATO -> TIPO DI GRAFICO. Nella finestra che si apre scegliamo TORTA e immediatamente il nostro grafico si trasformerà in un grafico a torta. Da menu INSERISCI -> DIDASCALIA DATI... scegliamo l'opzione MOSTRA IL VALORE COME PERCENTUALE e, per sceglierne il formato, clicchiamo sul pulsante con la dicitura FORMATO PERCENTUALE: disattivata l'opzione FORMATO SORGENTE scegliamo, per esempio, due decimali.
Per rendere leggibile il grafico a torta inseriamo una legenda: da menu INSERISCI -> LEGENDA... scegliamo MOSTRA LEGENDA -> A DESTRA nella finestrella che si apre.
Dopo questi interventi il nostro grafico apparirà come in figura 15.

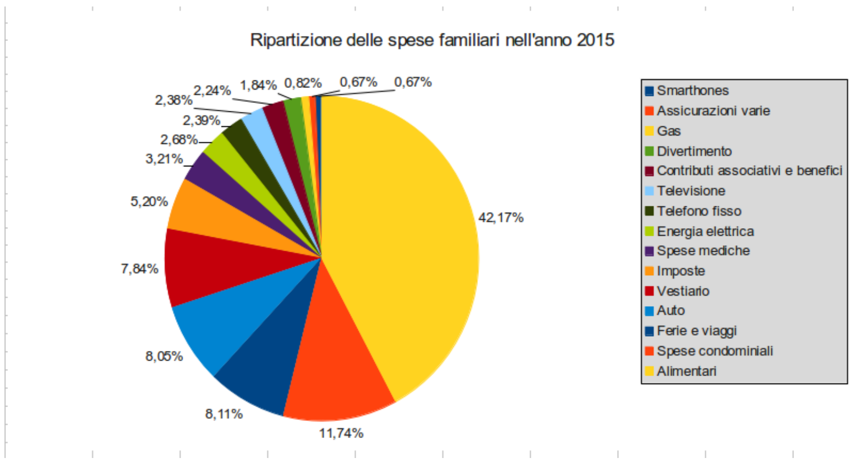


Figura 15: Grafico a torta con ripartizione percentuale delle spese

Tutto sembra complicato ma basta un po' di esercizio per familiarizzare.

Occorre ovviamente fare attenzione a scegliere il grafico adatto al tipo di dati che abbiamo nella tabella: nel nostro caso delle spese familiari non sarebbe sicuramente stato appropriato un grafico a linea o a dispersione, i quali sarebbero invece stati assolutamente adatti se, al posto di una tabella di ripartizione delle spese di un anno, avessimo avuto una tabella della serie temporale delle spese nel corso di un decennio.

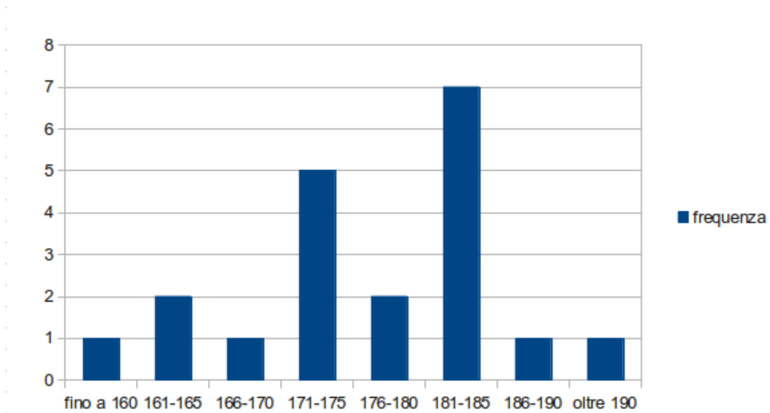
* * *

Dopo un esercizio nel quale abbiamo creato un grafico su dati disposti in serie, vediamo un caso di dati disposti in seriazione e prendiamo la seguente tabella di frequenza tratta dall'esempio esposto in figura 6, Statura in centimetri degli alunni di una V superiore:

F	G
classe	frequenza
fino a 160	1
161-165	2
166-170	1
171-175	5
176-180	2
181-185	7
186-190	1
oltre 190	1

Se copiamo questa tabella in un foglio di calcolo possiamo applicare il procedimento che abbiamo visto prima per creare un istogramma che ci mostra colonne di altezza corrispondente alla frequenza delle osservazioni riscontrate in classi di statura: un caso di statura inferiore a 160 centimetri, due casi di statura compresa tra 161 e 165 centimetri, ecc.

Posizioniamo il cursore del mouse in un punto qualsiasi della tabella, da menu Inserisci scegliamo Grafico... (lo stesso che premere il pulsante con l'icona nella barra degli strumenti) e troviamo creato immediatamente il nostro grafico come lo volevamo:



Andando avanti con la procedura di creazione guidata abbiamo solo da inserire, se vogliamo, titolo e didascalie.

5.2 Creazione guidata con correttivi

In entrambi gli esempi illustrati nel precedente paragrafo abbiamo una semplice tabella di due colonne, con la prima riga dedicata alla descrizione del contenuto delle colonne e la prima colonna dedicata alla descrizione del contenuto seguente di ciascuna riga, descrizioni, tutte, in formato testo (anche la descrizione delle classi di statura del secondo esempio, pur contenendo numeri, è chiaramente in formato testo: "fino a 160", "161-165", ecc.): questa è la situazione tipica di creazione automatica del grafico. Ci basta, pertanto, semplicemente lanciare la creazione guidata essendo posizionati con il cursore in una casella qualsiasi della tabella.

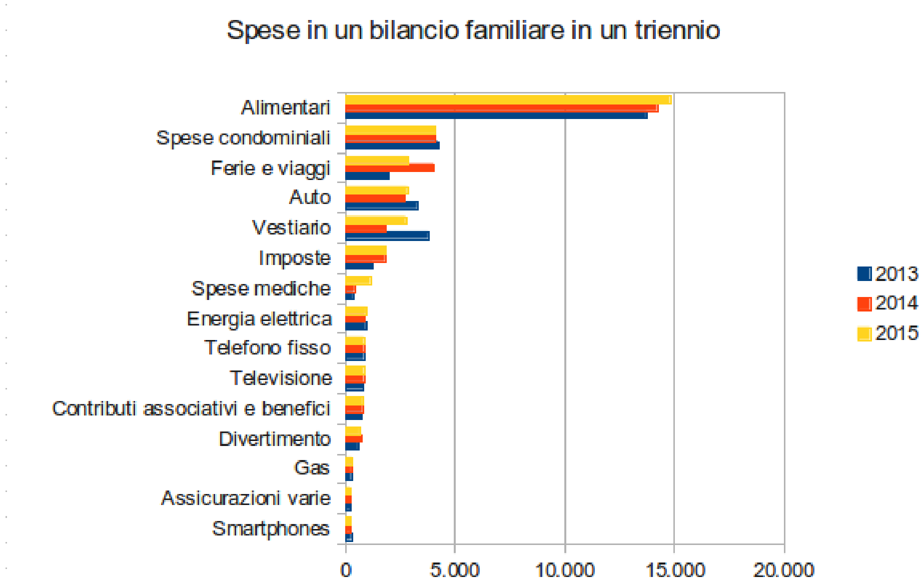
Spesso le cose non sono così semplici e l'automatismo della creazione guidata non è detto produca il grafico che volevamo noi.

Caso di tabelle con serie di dati per colonna e serie di dati per riga

E' il caso di tabelle che, oltre ad avere più righe, come quelle che avevamo nel precedente paragrafo, hanno anche più di due colonne. Sarebbe come se la tabella delle spese del bilancio familiare contenesse non già i dati di un solo anno ma quelli di tre anni consecutivi: in questo caso avremmo per colonna la serie di dati che si riferiscono al tipo di spesa e, per riga, la serie di dati che si riferiscono a ciascuno dei tre anni, come nella seguente tabella

	A	B	C	D
1	tipo di spesa	2013	2014	2015
2	Smartphones	267	241	235
3	Assicurazioni varie	234	235	235
4	Gas	265	275	287
5	Divertimento	567	756	645
6	Contributi associativi e benefici	760	775	785
7	Televisione	830	835	835
8	Telefono fisso	840	839	839
9	Energia elettrica	925	897	940
10	Spese mediche	345	412	1.127
11	Imposte	1.234	1.798	1.825
12	Vestiario	3.782	1.820	2.750
13	Auto	3.267	2.716	2.824
14	Ferie e viaggi	1.987	4.024	2.845
15	Spese condominiali	4.235	4.110	4.120
16	Alimentari	13.728	14.224	14.800
17				

Un grafico che, a mio avviso, può risultare utile per avere la sensazione sia della distribuzione delle spese sulle varie voci sia della variazione di ciascuna spesa nel triennio è il seguente:



A questo grafico si arriva, previo ordinamento dei dati della tabella sulla colonna D (spese dell'anno 2015), posizionando il cursore del mouse in un punto qualsiasi della tabella e scegliendo GRAFICO...da menu INSERISCI (lo stesso che premere il pulsante con l'icona  nella barra degli strumenti).
La scelta è caduta sul grafico a barra, per i motivi già illustrati nel precedente paragrafo.
Nella finestra di dialogo dopo la scelta AVANTI la scelta confermata è quella della SERIE DI DATI IN COLONNA e l'opzione scelta è PRIMA RIGA COME DIDASCALIA (ciò farà comparire gli anni nella legenda).
Dato altro AVANTI non c'è stato che scrivere il titolo da dare al grafico.

Caso di tabelle con una sola serie di dati

Il foglio riprodotto nella figura 6 contiene, elencate nella colonna A, le stature in centimetri degli alunni di una V superiore. E' il caso di una tabella con una sola colonna.

Se lanciamo la creazione guidata posizionandoci su questa tabella il grafico si crea e, non essendoci una colonna da cui pescare le didascalie, queste saranno indicate con una enumerazione 1, 2, 3, ecc.

La stessa cosa avverrebbe se i dati, anziché essere elencati su una colonna, fossero scritti su una riga.

Caso della prima colonna contenente valori numerici

Se la prima colonna contiene valori numerici la creazione guidata grafico, per default e con la importante eccezione che vedremo, non la utilizza come generatrice di didascalie e, se vogliamo utilizzarla come tale, dobbiamo intervenire manualmente.
Avviata la creazione guidata, scelto il tipo di grafico e dato AVANTI, nella finestra di dialogo AREA DATI che si apre, dobbiamo cliccare sull'opzione PRIMA COLONNA COME DIDASCALIA.

A tutto questo fa eccezione il grafico denominato XY (Dispersione) nella lista che ci viene proposta dalla creazione guidata.

Se scegliamo questo tipo di grafico, per default vedremo i valori della prima colonna scritti lungo l'asse orizzontale del grafico ma, attenzione, essi non sono scritti lì come didascalie ma come valori della variabile X che sta sull'asse delle ascisse di un piano cartesiano.
Nella costruzione guidata del grafico XY, infatti, le due colonne della nostra tabella vengono prese, la prima, come serie di valori della variabile indipendente X e, la seconda, come serie di valori corrispondenti della variabile dipendente Y. E questi valori vengono scritti sugli assi non già come didascalie ma come numeri, cioè veri e propri valori.

Questa particolarità del grafico XY, che lo distingue da tutti gli altri tipi, è molto importante per una giusta interpretazione delle linee di tendenza che, come vedremo in un prossimo paragrafo, possiamo utilizzare per arricchire i nostri grafici.

5.3 Creazione guidata con inserimento manuale dei dati

Nei due paragrafi precedenti abbiamo visto come si possa creare un grafico in via automatica o semiautomatica facendo partire la creazione guidata con il puntatore del mouse posizionato all'interno della tabella da cui vogliamo derivare il grafico.

Se facciamo partire la creazione guidata con il puntatore del mouse posizionato fuori dall'area occupata dalla tabella e fuori anche dalle celle immediatamente adiacenti quest'area, avremo la possibilità di costruire il grafico senza che nulla avvenga automaticamente.

L'utilità di un simile modo di procedere è molto relativa in quanto anche la creazione automatica avviene per step durante i quali possiamo intervenire manualmente a correggere ciò che non ci aggrada.

Per l'inserimento o la variazione delle aree e delle serie di dati nella seconda e nella terza finestra di dialogo della creazione guidata ci si avvale di finestrelle simili alla seguente

Cliccando sul pulsante sulla destra si apre una analoga finestrella nella quale possiamo inserire le aree e le serie dati selezionandole con il mouse nella tabella che le contiene.
Con questo sistema possiamo selezionare anche da tabelle che sono contenute in fogli di lavoro diversi da quello nel quale stiamo costruendo il grafico: ciò può tornare utile se preferiamo costruire il grafico in un foglio diverso da quello che contiene la o le tabelle origine dei dati.

5.4 Interventi successivi alla creazione del grafico

Nel precedente paragrafo 5.1 abbiamo già accennato al fatto che l'editing di un grafico già creato è sempre possibile facendo doppio click nell'area del grafico oppure cliccando destro in un punto qualsiasi dell'area del grafico e scegliere Modifica dal menu a discesa.

Abbiamo visto che il risultato di una di queste azioni è che tabella e grafico vengono selezionati e le voci di menu del foglio di calcolo Inserisci e Formato si apprestano al servizio del grafico e non più del foglio di calcolo.

A suo tempo abbiamo utilizzato questa procedura per inserire una didascalia dati che non c'era, ma possiamo fare ben altro: basta vedere l'elenco di azioni che ci viene proposto dalle richiamate voci di menu.

Con un po' di esercizi e di prove possiamo sperimentare quali e quante cose sono possibili.

Per esempio, se non ci piace la didascalia 1, 2, 3, ecc. che la creazione guidata ha inserito in un grafico creato da una tabella con una sola colonna, basta scegliere da menu Formato -> Asse -> Asse X, andare nella scheda Didascalia della finestra di dialogo Asse X che si apre e deselezionare l'opzione Mostra didascalia.

Al di là del ricorso alle voci di menu Inserisci e Formato, gli interventi possibili su ciascun elemento del grafico ci vengono proposti da menu a discesa cliccando destro sull'elemento del grafico sul quale desideriamo intervenire.

Tra le tante cose che possiamo fare nell'editing del grafico ne troviamo due che non sono semplici abbellimenti estetici ma costituiscono veri e propri arricchimenti e ne parliamo a parte nel prossimo paragrafo.

5.5 Arricchimenti

A tutti i grafici bidimensionali, ad eccezione per quelli a Torta e per quelli Azionari[7], possiamo aggiungere delle linee che mostrano il valore medio o l'andamento dei dati illustrati.

Linea del valore medio

In modalità editing grafico possiamo inserire la linea indicante il valore medio dei dati illustrati nel grafico scegliendo da menu Inserisci -> Linee valore medio.

In questo modo la zona del grafico si arricchirà di una linea orizzontale o verticale, a seconda di come sono disposti i dati, in corrispondenza del valore della media aritmetica dei dati stessi.

Se la zona dati contiene più serie, come avviene nel grafico che abbiamo visto prima, riferito a un triennio, la linea del valore medio sarà inserita per ciascuna serie nel suo colore.

Se interessa evidenziare la linea del valore medio non per tutte le serie ma solo per una occorre accedere al menu a discesa che compare cliccando destro sulla barra della serie che interessa e scegliere da lì l'inserimento della linea del valore medio. L'operazione è ripetibile per tutte le serie di cui vogliamo evidenziare la linea del valore medio e ciascun inserimento si sovrappone ai precedenti.

Linee di andamento

In certe edizioni di OpenOffice si chiamano Linee di tendenza.
Si prestano ad arricchire grafici che descrivono serie temporali di dati (ad esempio, spese familiari nell'ultimo decennio) o interrelazioni tra dati (ad esempio, consumo di carburante in funzione della velocità).

In un capitolo che sarà dedicato all'interpolazione ed alla proiezione dei dati vedremo in maniera più compiuta di che cosa si tratta.

In questa sede, senza preoccuparci del tipo di calcoli da cui deriva il disegno di una linea di andamento, ci limitiamo ad ammirarne il valore illustrativo, non dimenticando, comunque, una precisazione.

Se siamo in presenza di un qualsiasi tipo di grafico che non sia il tipo XY - sempre ricordato che per grafici a torta e azionari non esiste linea di andamento - anche se abbiamo scelto come didascalia valori numerici i calcoli per il disegno della linea di andamento assumono che ciò che sta sull'asse delle ascisse, quello orizzontale dove normalmente sta la X, sia una didascalia e non un valore numerico: come valore numerico per il calcolo della linea di andamento si assume l'enumerazione delle osservazioni (1, 2, 3, 4, ecc.). Solo nel tipo di grafico XY i valori, su entrambi gli assi, vengono assunti come valori numerici.

Il foglio Calc di LibreOffice, come quello delle altre suite open, ci propone la scelta tra quattro tipi di linea di andamento, evidenziando nelle icone che le contraddistinguono il tipo di dispersione di dati che ciascuna è adatta a rappresentare. Tutto ciò si trova nella finestra di dialogo riprodotta nella figura 16 alla pagina seguente, che si apre scegliendo, in modalità di editing del grafico, da menu Inserisci -> Linee di andamento...

[7] Il modello di grafico azionario è predisposto per indicare, per ciascun titolo azionario inserito nel grafico, i valori di chiusura e quelli minimo e massimo riscontrati nella seduta borsistica: la sua costruzione automatica parte da una tabella che riporta in quattro colonne, nell'ordine, nome del titolo azionario, minimo, massimo e valore di chiusura.

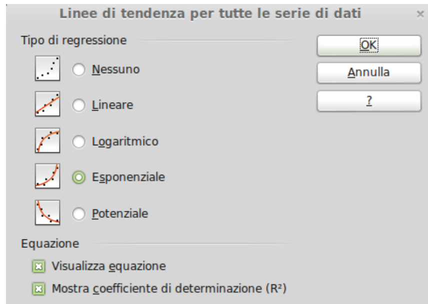


Figura 16: Finestra di dialogo per la scelta della linea di andamento

Nella figura è stato selezionato il tipo esponenziale e sono state opzionate le proposte di esporre nel grafico, oltre alla linea, anche l'equazione della linea stessa e il coefficiente di determinazione.

Quest'ultimo, sul quale torneremo a tempo debito, varia tra 0 e 1 e più si avvicina a 1, più la linea di andamento rispecchia l'andamento dei dati.

Le linee di andamento proposte, nell'ordine, sono disegnate in base alle seguente equazioni:

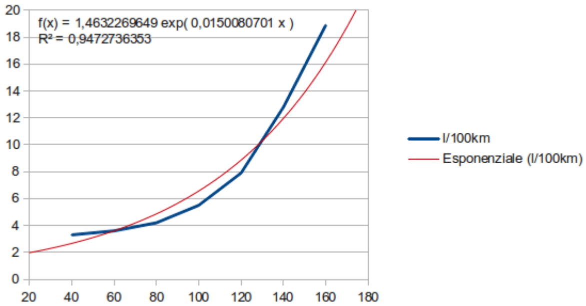
- la **lineare** segue l'equazione $y = ax + b$ che è l'equazione di una retta, dove a è il coefficiente angolare (pendenza rispetto all'asse delle ascisse) e b è l'intercetta sull'asse delle ordinate;
- la **logaritmica** segue l'equazione $y = a\,ln(x) + b$ ed è praticamente una lineare che legge in scala logaritmica l'asse delle ascisse;
- l'**esponenziale** segue l'equazione $y = b\,exp(ax)$, come dire $y = ba^x$, dove, cioè, la variabile x è in esponente;
- la **potenziale** segue l'equazione $y = bx^a$ ma, leggendo i dati in chiave logaritmica, esprime una linea retta e, francamente, non capisco a cosa serva in questo contesto.

Dalla seguente tabella, che mostra il consumo di carburante espresso in litri per cento chilometri in funzione della velocità espressa in chilometri orari,

	A	B
1	km/h	l/100km
2	40	3,3
3	60	3,6
4	80	4,2
5	100	5,5
6	120	7,9
7	140	12,8
8	160	18,9
9		

sono stati tratti i due grafici che compaiono nella figura 17 alla pagina seguente.
Il grafico di sinistra è di tipo **XY** e il grafico di destra è di tipo **linea**.

Salvo il fatto che la creazione guidata ha inserito nel grafico XY un completamento iniziale e finale sull'asse delle ascisse, i due grafici sono in tutto simili: del resto descrivono lo stesso fenomeno. La linea inserita è di tipo esponenziale ed è quella che accosta meglio l'andamento effettivo dei dati: lo si vede dal valore prossimo all'unità del coefficiente di determinazione.
L'unica vistosa differenza che riscontriamo è nell'equazione della linea di tendenza, la quale, come abbiamo detto prima, nel caso della linea di tipo XY si riferisce a valori della X della stessa scala numerica che vediamo sull'asse delle X (20, 40, 60, ecc.) mentre, nell'altro caso, si riferisce alla enumerazione 1, 2, 3, ecc. che contrassegna internamente le didascalie 40, 60, 80, ecc. che vediamo sull'asse delle X.



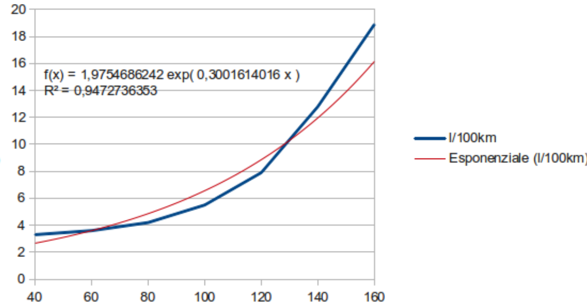


Figura 17: Grafici che illustrano il consumo di carburante in funzione della velocità

Dal momento che l'equazione della linea di andamento ci può servire per interpolare il valore del consumo in corrispondenza a un valore della velocità non compreso nella tabella da cui siamo partiti, nel caso volessimo determinare il più probabile valore di consumo corrispondente alla velocità di 70 chilometri orari utilizzando l'equazione del grafico di sinistra in formato XY dovremmo calcolare la formula inserendo al posto della X il valore 70. Se invece utilizzassimo l'equazione del grafico di destra, al posto della X dovremmo inserire il valore 2,5, tacca intermedia tra il 2 dei 60 chilometri orari e il 3 degli 80 chilometri orari.
Nel primo caso agiremmo in modo matematicamente corretto, utilizzando il legame funzionale che abbiamo determinato essere il più probabile tra la variabile indipendente X (velocità) e la variabile dipendente Y (consumo); nel secondo caso si tratterebbe di un espediente che matematicamente non ha senso, anche se, sul piano grafico, otteniamo comunque un valido risultato.
Nel caso, comunque, che tra una serie e l'altra non sia ipotizzabile l'esistenza di un legame di dipendenza funzionale, l'una cosa vale l'altra. In una serie temporale, per esempio, che esponga il nostro reddito nel decennio 2011 - 2020, che l'equazione utilizzi il valore 2012 o il valore 2 per identificare il secondo della serie non cambia nulla: né in un caso né nell'altro, infatti, esiste un legame di dipendenza funzionale tra questo valore e ciò che abbiamo guadagnato nell'anno identificato da questo valore.

6 Calcoli su matrici

I matematici, trattando problemi di trasformazioni lineari, geometria analitica, in genere problemi di algebra lineare, spesso ricorrono a particolari tabelle di numeri chiamate matrici.

Una matrice è una tabella in apparenza del tutto simile a quelle che abbiamo visto nel Capitolo 4. Mentre queste ultime, tuttavia, erano destinate a rappresentare dei fatti attraverso valori riferibili a definizioni contenute in intestazioni di colonna e di riga e il valore aveva un senso solo se riferito a queste definizioni, una matrice non ha bisogno di intestazioni e i valori che contiene valgono per quello che sono e per la posizione che occupano, il tutto nel contesto del problema matematico in funzione del quale la matrice è stata costruita.

Ad esempio, il seguente sistema di equazioni lineari

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$
$$2x_1 - x_3 = 4$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2$$

può essere convenientemente scritto così:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè nella forma:

$$Ax = b$$

dove A è la matrice dei coefficienti, x è il vettore delle incognite e b è il vettore dei termini noti.

L'elemento della matrice con valore 3 (nella notazione matriciale l'elemento $a_{1,1}$) altro non è che il valore del coefficiente dell'incognita x_1 nel sistema di equazioni cui si riferisce la matrice ed è collegato a tutti gli altri con i quali fa blocco.

Il fatto che esistano tabelle e matrici, in ogni caso strutture di dati che occupano delle zone di celle del foglio di calcolo, ha determinato l'utilità di prevedere strumenti per elaborare dei dati presi in blocco: le formule di matrice.

6.1 Formule di matrice

Una formula di matrice è una formula che elabora contemporaneamente tutti i dati contenuti in un'area del foglio di calcolo.

La formula di matrice si scrive, come ogni altra formula, partendo dal segno = ma la sua immissione non avviene semplicemente premendo il tasto Invio ma avviene premendo contemporaneamente i tasti Ctrl + Maiuscolo + Invio (per le tastiere in inglese Ctrl + Shift + Enter).

Dal momento che il risultato, quasi sempre, occuperà una zona del foglio di calcolo di dimensione pari a quella occupata dalla matrice di partenza, occorre preoccuparsi di posizionare la formula in una zona del foglio di calcolo dove esista spazio scrivibile libero. A tale scopo è consigliabile selezionare preventivamente, sulla destra e sotto la cella di immissione della formula, una zona del foglio libera dimensionata in misura sufficiente per contenere il risultato: ciò è consigliato ma non necessario se si usa il foglio Calc di Libre Office[8].

Le formule di matrice accettano tutti gli operatori aritmetici e di confronto che abbiamo visto nel paragrafo 2.1 e gli operandi possono essere zone del foglio di calcolo, indicate con l'indirizzo della cella iniziale in alto a sinistra e con l'indirizzo della cella finale in fondo a destra separati dall'operatore **:**, oppure numeri singoli, indicati direttamente o attraverso il loro indirizzo di cella.

Il risultato del calcolo si ottiene in questi modi:

- se un operando è una zona del foglio (matrice) e l'altro è un numero singolo (scalare) il calcolo avviene tra ogni cella della zona e il numero singolo;
- se un operando è una zona del foglio (matrice) e l'altro è una zona del foglio con una sola colonna (vettore) il calcolo avviene tra ogni cella della zona e l'operando corrispondente sulla stessa riga; se le righe della matrice e del vettore sono di dimensione diversa vengono ignorati i valori contenuti nelle zone eccedenti;
- se entrambi gli operandi sono zone del foglio (matrici) il calcolo avviene tra ogni cella della zona e la sua corrispondente nell'altra zona; se le zone sono di dimensione diversa vengono ignorati i valori contenuti nelle celle eccedenti.

Alcuni esempi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * 4 = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Ammettendo che la prima matrice occupi le celle A1, A2, B1 e B2 del foglio, la formula da immettere nella cella, per esempio, C1 previa selezione delle celle C1, C2, D1 e D2 è
= A1:B2 * 4.

[8] Facendo anche attenzione, in questo caso, a selezionare preventivamente l'esatto numero di celle che dovrà contenere il risultato pena, in caso di celle non sufficienti, avere un risultato monco e, in caso di celle in eccedenza, averne alcune riempite di #N/D.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Ammettendo che la prima matrice occupi le celle A1, A2, B1 e B2 del foglio e che il vettore occupi le celle C1 e C2 la formula da immettere nella cella, per esempio, D1 previa selezione delle celle D1, D2, E1 e E2 è
=A1:B2+C1:C2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ammettendo che la prima matrice occupi le celle A1, A2, B1 e B2 del foglio e che l'altra occupi le celle C1, C2, D1 e D2 la formula da immettere nella cella, per esempio, E1 previa selezione delle celle E1, E2, F1 e F2 è
=A1:B2*C1:D2.

Da notare che la formula di matrice, una volta immessa con Ctrl + Maiuscolo + Invio, compare nella zona di immissione tra parentesi graffe. Per esempio, l'ultima formula che abbiamo scritto qui sopra compare così
{=A1:B2*C1:D2}
ad indicare che si tratta di una formula di matrice.
Ciò, tuttavia, non significa che possiamo scriverla noi con le graffe nella zona di immissione: noi dobbiamo scriverla senza graffe e inserirla con Ctrl + Maiuscolo + Invio. Le graffe vengono aggiunte con questa operazione.

Riguardo gli operatori * e / (moltiplicazione e divisione) va precisato che questi operatori, inseriti in formule scritte come fatto in questo paragrafo, producono una moltiplicazione o una divisione tra zone del foglio di calcolo che nulla hanno a che vedere con la moltiplicazione o la divisione tra matrici dell'algebra matriciale.

Se riandiamo all'esempio del sistema di equazioni lineari portato nell'introduzione di questo capitolo e ridotto nella forma

$$Ax = b$$

vediamo che, se eseguissimo la moltiplicazione semplicemente inserendo l'operatore * tra la matrice A e il vettore x in una formula di matrice di quelle trattate in questo paragrafo, non otterremmo affatto il sistema di partenza ma otterremmo il sistema

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_1 - x_1 = 5 \\ &2x_2 - x_2 = 4 \\ &x_3 - 3x_3 + 2x_3 = 2 \end{aligned}$$

che è tutt'altra cosa: evidentemente il prodotto matriciale si ottiene con una formula diversa, che vedremo tra poco.

La possibilità di effettuare calcoli su più dati con una sola formula può tornare comunque utile, al di fuori dell'algebra matriciale, per semplificare alcune operazioni sul foglio di calcolo.

Supponiamo, per esempio, di avere la seguente tabella nella quale dobbiamo calcolare il costo di ciascun prodotto acquistato nelle quantità e al prezzo indicati:

	A	B	C	D
1	prodotto	prezzo al kg	peso kg	costo
2	albicocche	3,80	0,723	
3	pere	2,15	0,622	
4	susine	1,99	0,840	
5	pesche	2,65	0,940	

Se non utilizziamo formule di matrice dobbiamo inserire normalmente con Invio nella cella D2 la formula =B2*C2 e poi copiarla nelle celle D3, D4 e D5.

Se utilizziamo una formula di matrice basta che inseriamo con Ctrl + Maiuscolo + Invio nella cella D2 la formula =B2:B5*C2:C5.

Può capitale di dover modificare una formula di matrice già inserita: per poterlo fare dobbiamo previamente selezionare tutte le celle che contengono il risultato e, una volta apportate le modifiche, inserire la formula modificata con Ctrl + Maiuscolo + Invio.

6.2 Formule e funzioni di matrice già pronte

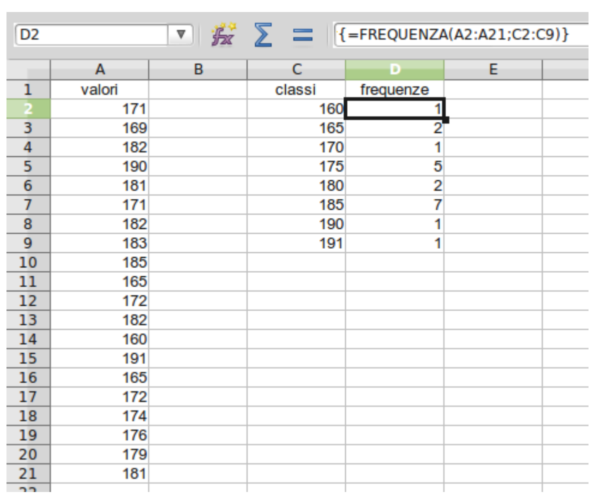
Nel foglio Calc di Libre Office la creazione guidata funzione contiene le funzioni che hanno a che fare con le matrici in una categoria a sé, intitolata Matrice.
La finestra di dialogo che utilizziamo per inserire i parametri contiene, nell'angolo in basso a sinistra, l'opzione Matrice che si dovrebbe auto-attivare nel corso dell'inserimento dei parametri.
Con questa opzione attivata l'inserimento della formula/funzione si può effettuare semplicemente premendo Invio o dando OK dalla finestra di dialogo anche senza avere preventivamente selezionato le celle destinate a contenere il risultato (bene verificare sempre, in ogni modo, che il foglio contenga una zona libera adeguata).

Le funzioni della categoria Matrice di Calc che vediamo in questo paragrafo sono quelle che servono per eseguire calcoli fini a sé stessi su matrici.

Nella categoria troviamo anche le funzioni Crescita, Tendenza, Regr.Lin e Regr.Log delle quali parleremo nel capitolo dedicato a Interpolazione e Regressione.

Troviamo infine una funzione che di matriciale ha solo il risultato che fornisce e che serve per costruire in forma di matrice una tabella di frequenza partendo da una serie di osservazioni. Dal momento che non avremo altra occasione di parlarne la vediamo subito: si tratta della funzione Frequenza.

FREQUENZA(Dati; Classi)
Restituisce un vettore che contiene le frequenze dei dati di una serie di osservazioni in classi di appartenenza.
Esempio:
Abbiamo già visto nel paragrafo 4.2 un esempio di tabella che indicava la frequenza delle stature di alunni di una quinta superiore. Quella che compare nella figura 6 era stata costruita manualmente senza ricorrere ad alcuna formula o funzione. Ora vediamo come costruirla con la funzione Frequenza.

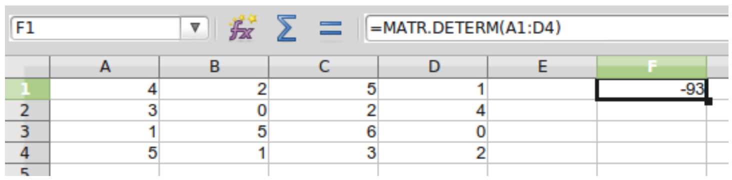

D2 {=FREQUENZA(A2:A21;C2:C9)}

	A	B	C	D	E
1	valori		classi	frequenze	
2	171		160	1	
3	169		165	2	
4	182		170	1	
5	190		175	5	
6	181		180	2	
7	171		185	7	
8	182		190	1	
9	183		191	1	
10	185				
11	165				
12	172				
13	182				
14	160				
15	191				
16	165				
17	172				
18	174				
19	176				
20	179				
21	181				

Nello stralcio di foglio riprodotto abbiamo a sinistra la serie di osservazioni.
Nella colonna C inseriamo una divisione in classi partendo da 160, che significa fino a 160 compreso, 165, che significa da 161 a 165 compreso, ecc. fino a 191, che significa oltre 190.
Ci portiamo ora nella cella D2, dove, attraverso la creazione guidata, inseriamo la formula che, una volta inserita, risulterà come la si vede nella finestrella di inserimento.
Nelle celle da D2 a D9 vediamo il risultato.

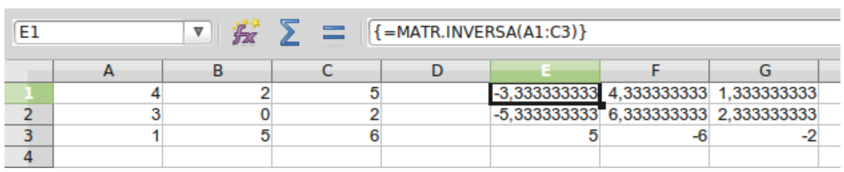
Esaminiamo ora in dettaglio le funzioni per fare calcoli su matrici.

MATR.DETERM(matrice)
Restituisce il determinante di una matrice.
La matrice deve essere quadrata.
Dal momento che il risultato è semplicemente un numero che occupa una sola cella, questa è una formula che ha a che fare con le matrici ma non è una formula di matrice: il suo risultato va nella cella attiva e non è necessario definire l'area per il risultato.
Esempio:


F1 =MATR.DETERM(A1:D4)

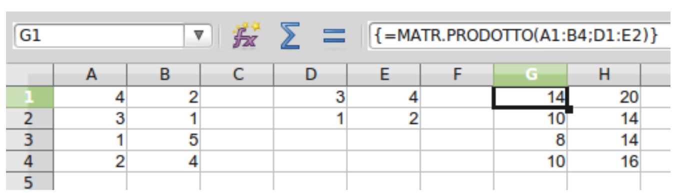
	A	B	C	D	E	F
1	4	2	5	1		-93
2	3	0	2	4		
3	1	5	6	0		
4	5	1	3	2		

MATR.INVERSA(matrice)
Restituisce la matrice inversa di una matrice.
La matrice deve essere quadrata.
Esempio:


E1 {=MATR.INVERSA(A1:C3)}

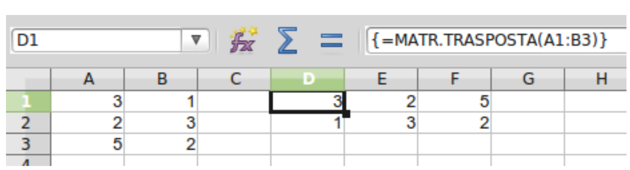
	A	B	C	D	E	F	G
1	4	2	5		-3,333333333	4,333333333	1,333333333
2	3	0	2		-5,333333333	6,333333333	2,333333333
3	1	5	6		5	-6	-2
4							

MATR.PRODOTTO(matrice; matrice)
Restituisce una matrice che è il prodotto matriciale di due matrici.
Il numero di colonne della prima matrice deve essere uguale al numero di righe della seconda matrice.
Il risultato è una matrice che ha il numero di righe della prima matrice e il numero di colonne della seconda matrice.
Esempio:


G1 {=MATR.PRODOTTO(A1:B4;D1:E2)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	4	2		3	4		14	20
2	3	1		1	2		10	14
3	1	5					8	14
4	2	4					10	16
5								

MATR.TRASPOSTA(matrice)
Traspone le righe e le colonne di una matrice.
La matrice risultante ha un numero di righe pari al numero di colonne della matrice di partenza e un numero di colonne pari al numero di righe della matrice di partenza.
Esempio:


D1 {=MATR.TRASPOSTA(A1:B3)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	1		3	2	5		
2	2	3		1	3	2		
3	5	2						

Altre funzioni proposte sono MATR.SOMMA.PRODOTTO, MUNIT, SOMMA.DIFF.Q, SOMMA.Q.DIFF e SOMMA.SOMMA.Q, ma il loro uso diretto è praticamente mai richiesto: si tratta di funzioni intermedie utilizzate nello sviluppo di altre funzioni più complesse di cui parleremo altrove.

7 Alla ricerca di soluzioni

Il foglio di calcolo si presta alla risoluzione di equazioni, sia che si tratti delle classiche equazioni per le quali dobbiamo trovare il valore della o delle incognite, sia che si tratti di trovare valori di variabili indipendenti che portino ad un certo valore di una variabile dipendente, sia, infine, che si tratti di problemi enunciabili con sistemi di equazioni e disequazioni come avviene nella programmazione matematica.

7.1 Equazioni con una sola incognita

Sono quelle nelle quali abbiamo un'espressione variamente configurata contenente una sola incognita, generalmente indicata con la lettera x. Non importa quante volte compaia la x, se la x compaia elevata a potenza o addirittura compaia come esponente (equazione trascendente).

Con il foglio di calcolo possiamo risolvere queste equazioni per via grafica o, se pretendiamo una precisione assoluta (pur nei limiti della precisione delle 15 cifre significative), con uno strumento specifico che troviamo nel menu STRUMENTI.

Ricerca di radici per via grafica

L'equazione va innanzi tutto scritta nella forma

$$espressione = 0$$

e *espressione* viene assunto come legame funzionale tra due variabili x e y.

Partiamo, per esempio, dall'equazione

$$2x + 2x^3 = 8x^2 - 1$$

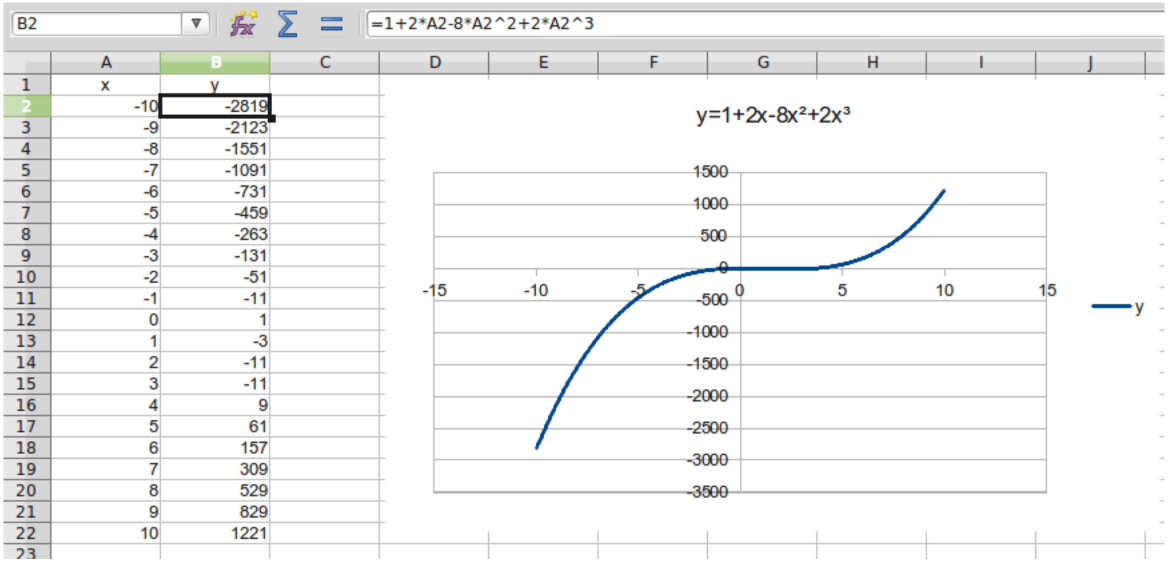
la ordiniamo nella forma

$$1 + 2x - 8x^2 + 2x^3 = 0$$

e utilizziamo la parte sinistra per esprimere il legame funzionale

$$y = 1 + 2x - 8x^2 + 2x^3$$

Apriamo ora il nostro foglio di calcolo e creiamo una tabella con due colonne, x e y, lettere che scriviamo nelle celle A1 e B1 come intestazioni delle colonne.
Nella colonna delle x (variabile indipendente), a partire dalla cella A2, inseriamo una enumerazione che indichi una zona abbastanza ampia attorno all'origine degli assi cartesiani: proviamo a inserire i numeri da -10 a 10 passando per lo 0.
Nella cella B2, nella colonna della y (variabile dipendente), di fianco alla cella che contiene il valore -10 nella colonna della x, inseriamo la formula del legame funzionale che corrisponde a quanto abbiamo a destra del segno di = dell'ultima espressione che abbiamo scritto sopra, mettendo al posto della x l'indirizzo di cella A2.
Copiamo poi la cella B2 in tutte le altre sottostanti fino a quella di fianco al valore 10 della x.
Abbiamo così una tabella che ci fornisce il valore di y dipendente dai valori di x indicati nella prima colonna.
Posizionati in un punto qualsiasi di questa tabella creiamo un grafico di forma XY (dispersione) come abbiamo imparato a fare leggendo il Capitolo 5, avendo l'avvertenza di scegliere le opzioni SOLO LINEE e LINEA SMORZATA.
Se abbiamo fatto tutto bene ci troviamo nella situazione illustrata nella figura 18.



x	y
-10	-2819
-9	-2123
-8	-1551
-7	-1091
-6	-731
-5	-459
-4	-263
-3	-131
-2	-51
-1	-11
0	1
1	-3
2	-11
3	-11
4	9
5	61
6	157
7	309
8	529
9	829
10	1221

Figura 18: Ricerca delle radici di un'equazione per via grafica

Abbiamo così creato il grafico della funzione $y = 1 + 2x - 8x^2 + 2x^3$ dal quale deriviamo che, siccome le radici della nostra equazione sono quei valori di x in corrispondenza dei quali si azzera la y, queste radici altro non sono che i valori di x in corrispondenza ai quali la linea del grafico attraversa l'asse orizzontale della ascisse.

Da quanto riusciamo a vedere dal grafico esistono radici nella zona tra -5 e 5 ma, purtroppo, la definizione del grafico non ci permette di capire altro e dobbiamo lavorare di zoom.

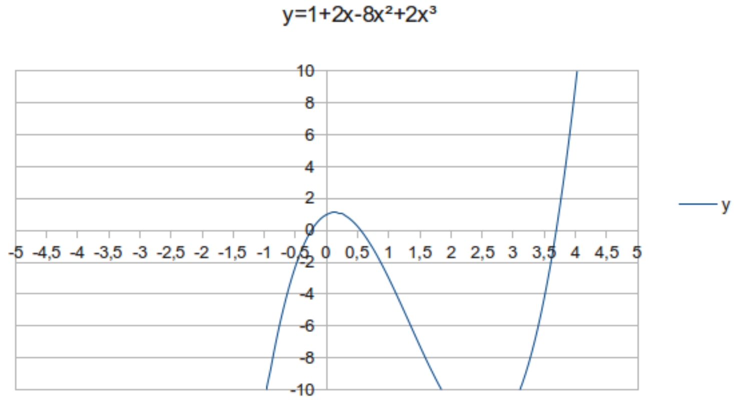
Entriamo in modalità di editing del grafico con doppio click all'interno di questo.

Puntiamo sull'asse orizzontale delle x fino a quando il cursore del mouse diventa una freccia. Clicchiamo destro su uno dei quadratini verdi che si formano alle estremità dell'asse e scegliamo dal menu a discesa Formato asse..., indi apriamo la scheda Scala.
Deselezioniamo le prime tre opzioni Automatico e inseriamo nella finestrella Minimo il valore -5, nella finestrella Massimo il valore 5 e nella finestrella Intervallo principale il valore 0,5; lasciamo Automatico il Conteggio intervallo secondario.
In questo modo abbiamo zoomato sull'asse orizzontale in modo da vedere solo l'intervallo tra -5 e 5 con un righello che mostri i valori sull'asse con tacche da 0,5.

Con lo stesso procedimento zoomiamo sull'asse verticale delle y in inserendo il valore minimo -10 e il valore massimo 10.

Ora è opportuno diminuire lo spessore della linea che traccia il grafico, in modo da rendere più precisa possibile la lettura dei suoi incroci con l'asse orizzontale.
Possiamo farlo, sempre essendo in modalità di editing del grafico, puntando su un punto qualsiasi della linea del grafico fino a quando il cursore diventa una freccia.
Clicchiamo destro e scegliamo Formato serie dati... e apriamo la scheda Linea dalla finestra di dialogo che compare e azzeriamo il valore contenuto nella finestrella Larghezza.

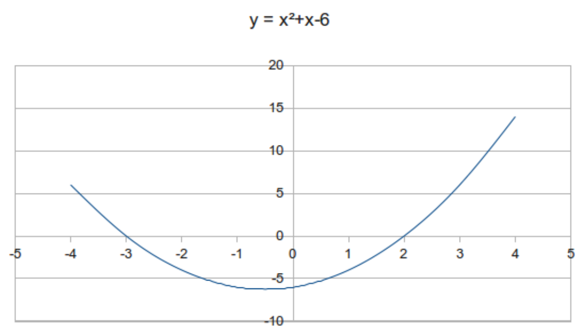
A questo punto clicchiamo con il mouse puntato al di fuori dell'area del grafico e ammiriamo il risultato del nostro lavoro:



Vediamo che le radici della nostra equazione sono tre e riusciamo a vedere che la prima ha un valore attorno a -0,25, la seconda ha un valore di poco superiore a 0,50 e la terza si colloca attorno a 3.70.
Abbastanza per avere un'idea ma un po' poco come precisione numerica.
Peraltro non dimentichiamo che siamo di fronte ad un'equazione di terzo grado con radici non intere. In presenza di equazioni più semplici il metodo grafico può bastare anche come precisione dei risultati.

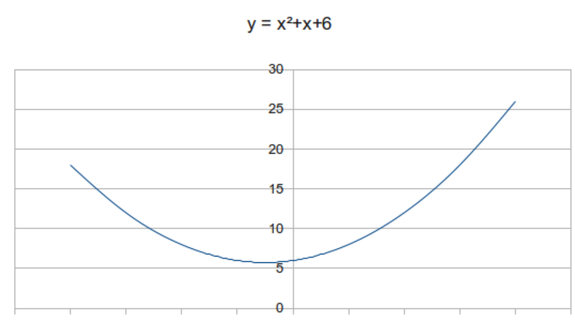
Il grande pregio del metodo grafico è comunque quello di farci vedere quante radici reali esistono (tante quante volte il grafico attraversa l'asse orizzontale) e se esistono (se il grafico non tocca mai l'asse orizzontale significa che l'equazione non ha radici reali).

L'equazione $x^2 + x - 6 = 0$ rappresentata in questo grafico



vediamo che ha due radici reali e le leggiamo bene in -3 e 2 (i valori di x in corrispondenza dei quali il grafico passa attraverso l'asse orizzontale).

L'equazione $x^2 + x + 6 = 0$ rappresentata in questo grafico



non ha radici reali (il grafico non tocca mai l'asse orizzontale).

Calcolo delle radici

Il foglio di calcolo ci offre uno strumento con cui possiamo calcolare il valore delle radici di un'equazione con la massima precisione: in Calc di LibreOffice e simili si chiama Ricerca valore destinazione e si trova nel menu Strumenti.

E' uno strumento che calcola le radici dell'equazione in via iterativa: parte da una soluzione ipotetica, con ogni probabilità errata, e si ferma quando trova di poterla modificare con una soluzione reale giusta.

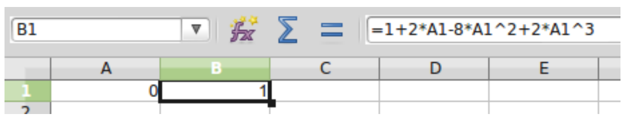
Il pregio del metodo è quello di offrirci la soluzione nel modo più preciso possibile.

Il difetto è che non ci dà modo di sapere quante soluzioni esistono e dobbiamo avere una certa abilità per tirarle fuori tutte.

Riprendiamo la nostra equazione

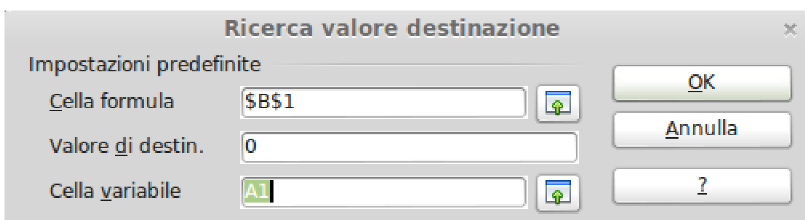
$$1 + 2x - 8x^2 + 2x^3 = 0$$

Apriamo il foglio di calcolo e dedichiamo la cella A1 a contenere il valore della radice che calcoliamo, inserendo inizialmente il valore 0 e predisponendola per contenere 15 decimali; dedichiamo poi la cella B1 alla formula, corrispondente alla parte dell'equazione a sinistra del segno di $=$, avendo cura di inserire al posto della x l'indirizzo di cella A1.



Il fatto che nella cella B1 ci sia il valore 1 sta ad indicare che la radice ipotizzata con il valore 0 è sbagliata.

Ora ci posizioniamo sulla cella B1 e lanciamo la ricerca di una soluzione giusta partendo da quella sbagliata che abbiamo ipotizzato: da menu Strumenti scegliamo Ricerca valore di destinazione e compiliamo così la finestra che si apre

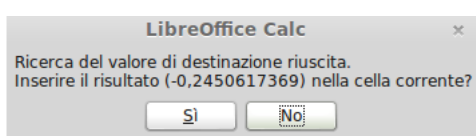


Se siamo posizionati nella cella B1, il suo indirizzo è già inserito nella finestrella della Cella formula.

Nella finestrella Valore di destinazione inseriamo 0: la radice è giusta quando il valore dato dalla formula contenuta nella cella della formula si azzera.

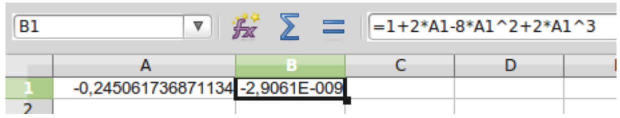
Nella finestrella Cella variabile inseriamo l'indirizzo della cella A1.

Lanciamo il calcolo con OK e, dopo qualche istante ci troviamo di fronte questa finestra di dialogo



dove ci viene annunciato che è stata trovata una soluzione, ci viene indicata questa soluzione e ci viene proposto di inserirla nella cella corrente (che è quella che avevamo indicato come cella variabile).

Rispondiamo SI e nel nostro foglio abbiamo



Nella cella A1 abbiamo la radice -0,245061736871134 (quella che con il metodo grafico avevamo ipotizzato di valore attorno a -0,25) e nella cella B1 abbiamo un valore prossimo a 0, a testimoniare che, con gli inevitabili arrotondamenti, siamo veramente in presenza di una radice.

Ora si tratta di capire se ce ne sono altre.

Proviamo a inserire nella cella A1 un valore negativo abbastanza elevato, ad esempio -20 e ripetiamo il processo di prima: viene trovato un risultato che ripete quello di prima. Ciò significa che radici negative con ogni probabilità non ce ne sono altre.

Proviamo ora ad inserire nella cella A1 un valore positivo abbastanza alto, ad esempio 20 e ripetiamo nuovamente il processo: viene trovato il risultato 3,692510194994580 (quello che con il metodo grafico avevamo ipotizzato attorno a 3,70).

Proviamo ancora a vedere se tra 0 e questo valore ci sia ancora qualche cosa. Inseriamo nella cella A1 il valore 1 e ripetiamo il solito processo: viene trovato il risultato 0,552551556633575 (quello che con il metodo grafico avevamo ipotizzato di poco superiore a 0,50).

Una volta trovate tre radici per un'equazione di terzo grado dovremmo essere a posto.

Si può comunque sempre verificare con il metodo grafico, soprattutto nel caso, sempre di fronte ad un'equazione di terzo grado, trovassimo solo una radice e volessimo avere la certezza che non ve ne siano altre.

Altri utilizzi dello strumento di ricerca del valore di destinazione

Lo strumento che abbiamo utilizzato per calcolare le radici di un'equazione, che, in quel caso, abbiamo applicato per ricercare il valore 0 corrispondente al secondo termine di un'equazione nella forma

$$espressione = 0$$

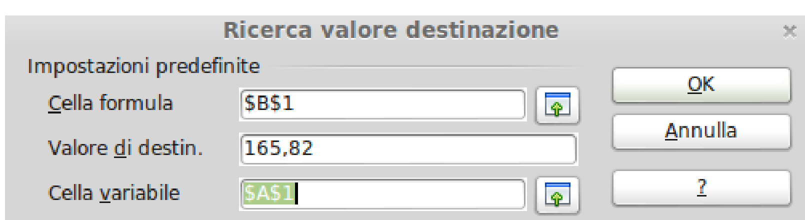
lo possiamo ovviamente utilizzare per la ricerca di un qualsiasi valore.

Potremmo, per esempio voler trovare quale raggio deve avere un cerchio affinché l'area di questo cerchio sia 165,82.

Apriamo il foglio di calcolo, teniamo la cella A1 disponibile per il risultato (il raggio del cerchio), preparandola a contenere 15 cifre decimali ed inserendo inizialmente il valore 0, e inseriamo nella cella B1 la formula dell'area del cerchio

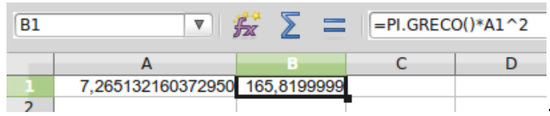
$$= \text{PI.GRECO()} * \text{A1\^{}2}$$

Posizionati sulla cella B1 lanciamo la ricerca del valore di destinazione e compiliamo così la finestra di dialogo



Diamo OK e rispondiamo SI nella successiva finestra dove ci viene proposta una soluzione.

Ora nel nostro foglio abbiamo il raggio cercato nella cella A1 e l'area corrispondente nella cella B1 (sempre con le approssimazioni del caso)



7.2 Sistemi di equazioni di primo grado

Nell'introduzione al Capitolo 6, parlando di matrici, abbiamo visto che un sistema di equazioni lineari come questo

$$\begin{aligned}&3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5\\&2x_1 - x_3 = 4\\&x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2\end{aligned}$$

può essere convenientemente scritto così:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cioè nella forma:

$$Ax = b$$

dove A è la matrice dei coefficienti, x è il vettore delle incognite e b è il vettore dei termini noti.

L'algebra matriciale ci dice che questo sistema viene risolto ponendo

$$A^{-1}b = x$$

Cioè moltiplicando la matrice inversa di A per il vettore dei termini noti otteniamo il vettore delle incognite.

Basta allora che inseriamo in un foglio di calcolo la matrice A dei coefficienti e il vettore dei termini noti, calcoliamo la matrice inversa di A con la relativa formula di matrice e moltiplichiamo questa matrice inversa per il coefficiente dei termini noti utilizzando la funzione preconfezionata del prodotto matriciale.

La figura 19 ci mostra tutto questo.

	A	B	C	D	E
1	3	2	-1		5
2	2	0	-1		4
3	1	-3	2		2
4					
5	0,230769231	0,076923077	0,153846154		1,769230769
6	0,384615385	-0,538461538	-0,076923077		-0,384615385
7	0,461538462	-0,846153846	0,307692308		-0,461538462
8					

Figura 19: Soluzione di un sistema lineare

Nella cella A5 è inserita la formula di matrice

{=MATR.INVERSA(A1:C3)}

e nella cella E5 è inserita la formula di matrice

{=MATR.PRODOTTO(A5:C7;E1:E3)}

Nelle celle E5, E6 ed E7 abbiamo rispettivamente i valori delle incognite x_1, x_2 e x_3.

7.3 Programmazione matematica

La programmazione matematica si occupa di problemi di ottimizzazione, problemi nei quali si abbia da minimizzare o massimizzare una funzione matematica le cui variabili siano vincolate ad appartenere ad un insieme prefissato.

In generale, data una determinata funzione matematica, si tratta di trovare il valore delle variabili che rendano minima, massima a uguale a un certo valore la funzione stessa.

Per questo genere di problemi il foglio di calcolo ci mette a disposizione lo strumento RISOLUTORE, che si trova nel menu STRUMENTI.

Chi usa Calc di LibreOffice e simili trova installato per default un Risolutore adatto solo per modelli lineari e, per rendere questo risolutore adatto anche per problemi non lineari, occorre installare il pacchetto **nlpsolver** che si trova nell'installatore di applicazioni del sistema Linux; chi usa LibreOffice su Windows o OS X, può scaricare da Internet il file di estensione nlpsolver.oxt, cercandolo in una barra di ricerca, installabile con STRUMENTI -> GESTIONE ESTENSIONI di Calc.

Questo risolutore utilizza il metodo del simplesso per i problemi lineari e il metodo evolutivo per problemi non lisci.

Vediamo come si possa risolvere un problema di ottimizzazione con questo potentissimo strumento.

Mi piace utilizzare un esercizio proposto dal prof. Chiang[9] che, tra i tanti noiosissimi esercizi di ottimizzazione di profitti, di ottimizzazione di fatturati in dipendenza dei budget pubblicitari, di combinazione ottimale dei fattori produttivi per minimizzare i costi di produzione, ecc., ha ritenuto di procurare una divertente variante ai suoi lettori.

Problema

Un ragazzo esce con due ragazze, Nancy e Mary.
Egli sa, per esperienza, che:

- Mary, più sofisticata, preferisce locali più esclusivi, dove una serata (3 ore) costa 12 dollari; mentre Nancy preferisce trattenimenti più popolari, per i quali il costo di una serata (3 ore) è 8 dollari;
- il suo bilancio gli consente di spendere in serate 48 dollari al mese; e lo studio gli lascia al massimo 18 ore e 4000 calorie di energia al mese per attività sociali;
- ogni serata con Mary consuma 500 calorie, mentre, essendo Nancy più vivace, ogni serata trascorsa con lei ne richiede il doppio.

Egli si attende 6 unità di piacere da una serata trascorsa con Mary e 5 da una serata trascorsa con Nancy.
Come dovrà pianificare la sua vita sociale onde massimizzare il piacere?

Traduzione del problema in termini matematici

Cominciamo ad individuare la funzione obiettivo.
Indichiamo con x_1 il numero di serate da trascorrere con Mary in un mese e con x_2 il numero di serate da trascorrere con Nancy in un mese. Date le unità di piacere attribuibili alle rispettive compagnie, la funzione del piacere, riferita a un mese, chiamiamola π, è esprimibile in

$$\pi = 6x_1 + 5x_2$$

[9] Alpha C. Chiang - Introduzione all'economia matematica, Boringhieri

Traduciamo ora in espressioni matematiche i vincoli, sempre ricordando che abbiamo indicato con con x_1 il numero di serate da trascorrere con Mary in un mese e con x_2 il numero di serate da trascorrere con Nancy in un mese.
Abbiamo il vincolo di bilancio che, per quanto abbiamo detto nell'enunciazione del problema, è esprimibile con la disuguaglianza

$$12x_1 + 8x_2 \leqslant 48$$

Abbiamo poi il vincolo di tempo: abbiamo detto che il ragazzo ha a disposizione 18 ore al mese, cioè 6 serate da 3 ore. Allora

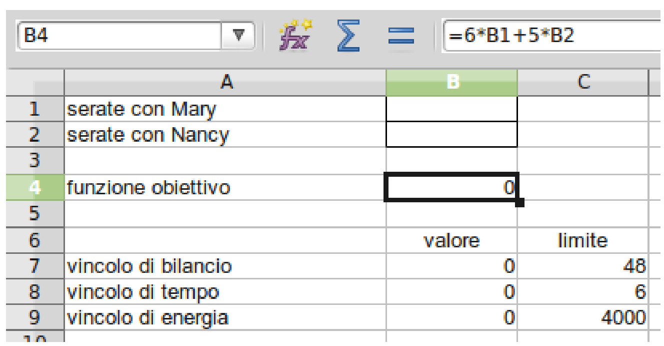
$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$

Abbiamo infine il vincolo dell'energia: 4.000 calorie al mese e, dati i dispendi previsti per le serate con le rispettive compagnie, diciamo che

$$500x_1 + 1000x_2 \leqslant 4000$$

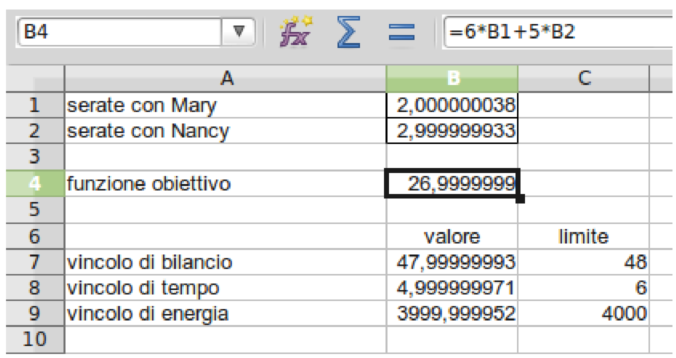
Risoluzione del problema

Ora dobbiamo inserire nel foglio di calcolo tutti i dati.
Riserviamo la colonna A alla descrizione di ciò che inseriamo nelle colonne successive.



Le celle incorniciate B1 e B2 sono destinate a contenere la soluzione del problema.
Nella cella B4 è inserita la funzione obiettivo, ovviamente con gli indirizzi delle celle B1 e B2 al posto di x_1 e di x_2.
Ogni disuguaglianza esprimente un vincolo è inserita nelle coppie di celle B7 C7, B8 C8 e B9 C9 con la parte sinistra della disuguaglianza nella cella di colonna B e il limite (parte destra della disuguaglianza) nella cella di colonna C.
Posizionati sulla cella B4 lanciamo il risolutore con menu Strumenti -> Risolutore... e compiliamo così la finestra di dialogo che si apre

Clicchiamo sul pulsante Risolvi e, dopo qualche istante - più o meno istanti in dipendenza della complessità del problema - se è stata trovata una soluzione comparirà un messaggio nel quale ci si dice che c'è una soluzione e che siamo in situazione di stallo (significa che il processo di ricerca si è interrotto in quanto c'è stallo nel miglioramento, cioè non esiste soluzione migliore).
Accettiamo con OK e, nella finestra di dialogo successiva, scegliamo Mantieni risultato.
Il foglio sarà ora così



B4 | =6*B1+5*B2

	A	B	C
1	serate con Mary	2,000000038	
2	serate con Nancy	2,999999933	
3			
4	funzione obiettivo	26,9999999	
5			
6		valore	limite
7	vincolo di bilancio	47,99999993	48
8	vincolo di tempo	4,999999971	6
9	vincolo di energia	3999,999952	4000
10			

Vediamo che la soluzione trovata è di un massimo della funzione obiettivo di intensità di piacere 27, trascorrendo 2 serate con Mary e 3 serate con Nancy al mese, con esaurimento totale di soldi ed energia e con una serata disponibile non impiegata.

8 Interpolazione e regressione

Nell'ambito della statistica descrittiva, oltre a quanto abbiamo visto nei Capitoli 3 e 5, il foglio elettronico ci offre potenti strumenti, applicabili quando tra una variabile e un'altra variabile si possa supporre l'esistenza di una qualche dipendenza, per sintetizzare al massimo la rappresentazione dei dati con l'equazione di una linea più o meno curva.

Nel paragrafo 5.5 del Capitolo 5 siamo già entrati in questo argomento e abbiamo visto come gli strumenti grafici del foglio di calcolo ci offrano la possibilità di arricchire i grafici con le così dette linee di andamento, che altro non sono che linee interpolanti.

Ora affrontiamo l'argomento in maniera più diretta e completa, anche al fine di fare cose in più di quelle possibili con gli strumenti collegati alla creazione dei grafici.

8.1 Interpolazione statistica tra punti noti

L'interpolazione si propone di trovare una funzione (interpolante) che descriva la relazione esistente tra l'insieme dei valori osservati di una variabile indipendente x e quello dei valori osservati di una variabile y ritenuta dipendente dalla variabile x.

Ciò allo scopo, come si è detto prima, di sintetizzare la rappresentazione dei dati e di dedurre il valore attribuibile alla y in presenza di valori della x non osservati. In statistica, scienza degli errori, l'interpolazione può avere anche la pretesa di sostituire ad una distribuzione di valori osservati ma affetti da errori di misurazione una distribuzione approssimata ma ritenuta più aderente alla realtà.

Matematicamente è possibile realizzare l'interpolazione sia con il proposito di trovare una interpolante che passi per tutti i punti noti, cioè per tutti i punti corrispondenti alle coppie di valori x e y osservati, sia con il proposito di trovare una interpolante che passi attraverso i punti noti avvicinandosi il più possibile ad essi e non necessariamente toccandoli.

Nel primo caso, di fronte a n osservazioni, la curva passante per tutti i punti sarà rappresentabile con un polinomio di grado $n-1$: come dire che se abbiamo 15 coppie di dati, dobbiamo trovare un polinomio di grado 14, del tipo

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 .... + nx^{12} + ox^{13} + px^{14}$$

Nel secondo caso, rinunciando alla pretesa di toccare tutti i punti con l'interpolante, ci possiamo limitare a polinomi di grado ben inferiore, purché, ovviamente, il risultato sia accettabile.

Peraltro, nella valutazione di quale sia il valore di una y corrispondente ad una x non osservata, entrambi i metodi ci forniscono una valutazione e non un dato certo, per cui lasciamo ai matematici ed a strumenti diversi dal foglio di calcolo lo sfizio di passare per tutti i punti noti e, come fanno gli statistici, ci accontentiamo dell'interpolazione tra punti noti: cosa che possiamo fare alla grande con il foglio di calcolo grazie allo strumento risolutore.

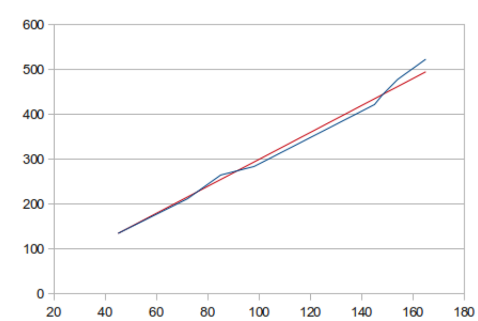
Cominciamo con l'attrezzare il foglio di calcolo per fare queste cose.

Partiamo dalla seguente serie di osservazioni

x	y
45	135
72	212
85	265
98	284
145	422
148	443
154	478
165	523

Apriamo un nuovo foglio di calcolo, inseriamo questi dati a partire dalla cella A1 e facciamo in modo che il nostro foglio diventi così:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y stimato	scarto	scarto quadrato		coefficienti	
2	45	135	135	0	0		a	0
3	72	212	216	-4	16		b	3
4	85	265	255	10	100		c	
5	98	284	294	-10	100		d	
6	145	422	435	-13	169		e	
7	148	443	444	-1	1		f	
8	154	478	462	16	256		g	
9	165	523	495	28	784			
10			somma scarti	al quadrato	1426		R quadro	0,995818944



Dedicate ai dati osservati le colonne A e B, dedichiamo la colonna C ai dati che stimeremo con l'interpolante che dobbiamo cercare, dedichiamo la colonna D allo scarto tra i valori della y osservati e quelli stimati e dedichiamo la colonna E ai quadrati di questi scarti.

Riserviamo la colonna H all'output principale della ricerca che faremo: il valore dei coefficienti del polinomio interpolante che cerchiamo e il valore dell'indice di correlazione esistente tra i valori della y osservati e quelli stimati.

Dalle serie di dati osservati notiamo che esiste tra loro una relazione di tipo lineare: alle variazioni della x corrispondono variazioni della y abbastanza proporzionali. Facciamo allora un primo tentativo di ricerca dell'equazione interpolante limitandoci al polinomio di primo grado, cioè confidiamo nel fatto che una buona interpolante nel nostro caso sia una linea retta con equazione $y = a + bx$. Visto, poi, che la y tende ad essere il triplo della corrispondente x, scriviamo rispettivamente nelle celle H2 e H3 un'ipotesi di valori 0 per a e 3 per b: il risolutore avrà bisogno di queste ipotesi per far partire le sue iterazioni.

Ora inseriamo nella cella C2 una formula per la stima dei valori y: questa formula altro non è che la parte destra dell'equazione della retta che abbiamo visto prima, con l'indirizzo della cella H2 al posto della a, l'indirizzo della cella H3 al posto della b e l'indirizzo alla cella A2 al posto della x (la cella A2 è infatti quella che contiene il primo valore della x in corrispondenza al quale dobbiamo stimare il primo valore della y). Inseriamo pertanto in C2 la formula =$H$2+$H$3*A2
Attenzione agli indirizzi assoluti e agli indirizzi relativi. Dal momento che questa formula dovremo copiarla nelle celle sottostanti la cella C2, bene che l'indirizzo alla cella A2 sia relativo, in modo che diventi A3 copiato nella cella C3 ecc.; in qualsiasi riga ci troviamo dovremo invece sempre pescare dalle celle H2 e H3 il valore dei coefficienti e, pertanto, gli indirizzi di queste celle devono essere assoluti (un modo rapido per renderli tali è scriverli come relativi e, prima di dare INVIO, dare SHIFT + F4).
Copiamo la cella C2 nelle celle sottostanti, dalla C3 alla C9.

Nella cella D2 inseriamo la formula =B2-C2 e, nella cella E2, la formula =D2^2

Nella cella H10 inseriamo la formula per il calcolo del coefficiente di correlazione =CORRELAZIONE(B2:B9;C2:C9) e, infine, totalizziamo la colonna E con =SOMMA(E2:E9) nella cella E10.

Sarebbe quanto basta per avviare la nostra ricerca con il risolutore.

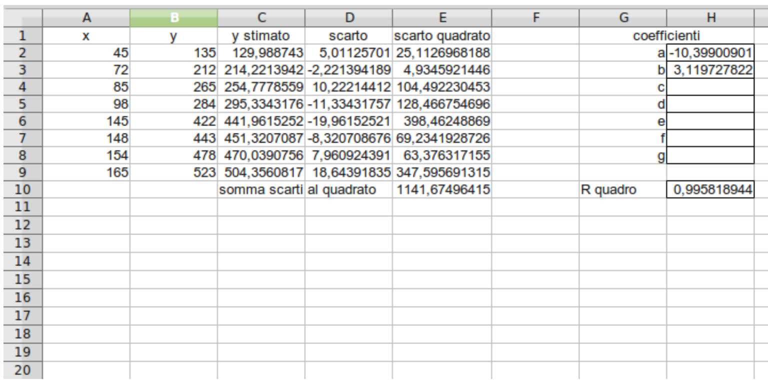
Volendo, possiamo rendere il tutto più spettacolare inserendo un grafico che ci illustri i risultati che stiamo producendo: si tratta di un grafico di tipo XY SOLE LINEE in cui inseriamo, con le x di colonna A sull'asse delle ascisse, le y delle colonne B (valori effettivi) e C (valori stimati): le rispettive linee sono di colore blu e di colore rosso.

L'ultima formula che abbiamo inserito, la somma della cella E10, è la chiave di tutto.

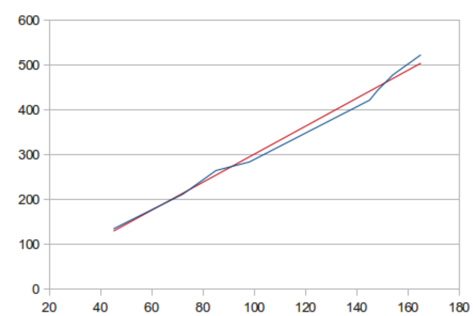
Il risolutore, infatti, per la ricerca della migliore interpolante, si affida al metodo dei minimi quadrati: la migliore interpolante è quella che rende la somma dei quadrati degli scarti tra i valori della y reali e i valori della y calcolati dall'interpolante la minima possibile. Pertanto la formula che abbiamo inserito nella cella E10 rappresenta la funzione obiettivo per il risolutore, che dovrà cercare i valori dei due coefficienti a e b (da inserire nelle celle H2 e H3 al posto di quelli di prova inseriti prima).

Posizionati nella cella E10 lanciamo il risolutore compilando in questo modo la finestra di dialogo

e otteniamo questo risultato



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y stimato	scarto	scarto quadrato		coefficienti	
2	45	135	129,988743	5,01125701	25,1126968188		a	-10,39900901
3	72	212	214,2213942	-2,221394189	4,9345921446		b	3,119727822
4	85	265	254,7778559	10,22214412	104,492230453		c	
5	98	284	295,3343176	-11,33431757	128,466754696		d	
6	145	422	441,9615252	-19,96152521	398,46248869		e	
7	148	443	451,3207087	-8,320708676	69,2341928726		f	
8	154	478	470,0390756	7,960924391	63,376317155		g	
9	165	523	504,3560817	18,64391835	347,595691315			
10			somma scarti	al quadrato	1141,67496415		R quadro	0,995818944



I coefficienti calcolati dal risolutore sono -10,398923962 e 3,1197274382 e, di conseguenza, la migliore interpolante della nostra serie di dati è la retta con equazione

$$y = -10,398923962 + 3,1197274382x.$$

Rispetto alla nostra ipotesi di coefficienti 0 e 3 abbiamo una retta un tantino più inclinata verso l'alto: c'eravamo tuttavia andati vicino, tanto è vero che il coefficiente di correlazione è lo stesso. Notiamo, invece, che la somma dei quadrati degli scarti, che era 1426 è diventata 1141, a dimostrazione che la retta calcolata dal risolutore produce meno scarti tra valori reali e valori teorici rispetto a quella che avevamo ipotizzata a occhio ed è pertanto da ritenersi migliore come interpolante.

*   *   *

Da un caso che si poteva risolvere a occhio passiamo a un caso più complicato.

Sia ora la nostra serie di osservazioni la seguente

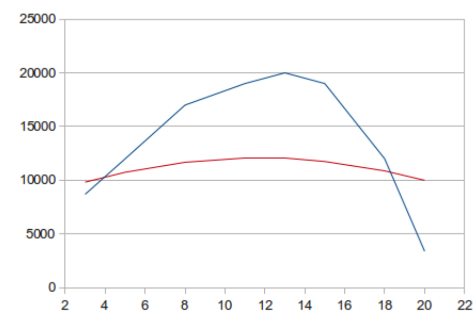
x	y
3	8700
5	12000
8	17000
11	19000
13	20000
15	19000
18	12000
20	3400

Notiamo immediatamente che una retta non può certamente interpolare una distribuzione come questa ma serve una curva e proviamo a vedere cosa succede con un polinomio di secondo grado

$$y = a + bx + cx^2$$

Realizziamo in un foglio di calcolo un impianto simile a quello dell'esercizio precedente

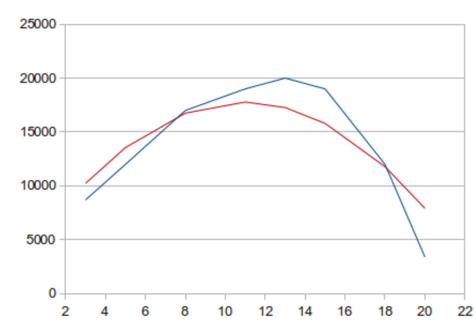
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y stimato	scarto	scarto quadrato		coefficienti	
2	3	8700	9830	-1130	1276900		a	8000
3	5	12000	10750	1250	1562500		b	700
4	8	17000	11680	5320	28302400		c	-30
5	11	19000	12070	6930	48024900		d	
6	13	20000	12030	7970	63520900		e	
7	15	19000	11750	7250	52562500		f	
8	18	12000	10880	1120	1254400		g	
9	20	3400	10000	-6600	43560000			
10			somma scarti	al quadrato	240064500		R quadro	0,951279456



Nella cella C2 abbiamo inserito la formula =$H$2+$H$3*A2+$H$4*A2^2 e nelle celle H2, H3 e H4 abbiamo inserito, con vari tentativi, i coefficienti di prova 8000, 700 e -30 in modo tra trovare una curva di andamento simile a quella che rappresenta i dati osservati: lo vediamo da come si attesta la distribuzione delle y teoriche, dal valore prossimo all'unità del coefficiente di correlazione e dal grafico, dove la curva blu rappresenta i dati osservati e la rossa rappresenta i dati teorici.

Posizionati nella cella E10 lanciamo il risolutore, ricordando di scegliere l'opzione Minimo e di inserire come celle da cambiare l'intervallo $H$2:$H$4 e questo è il risultato

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y stimato	scarto	scarto quadrato		coefficienti	
2	3	8700	10233,48319	-1533,483187	2351570,68443		a	3442,520786
3	5	12000	13560,79145	-1560,791454	2436069,96278		b	2623,654134
4	8	17000	16751,75385	248,2461454	61626,1487013		c	-120
5	11	19000	17782,71626	1217,283745	1481779,71523		d	
6	13	20000	17270,02452	2729,975478	7452766,10861		e	
7	15	19000	15797,33279	3202,667211	10257077,2616		f	
8	18	12000	11788,29519	211,7048099	44818,926545		g	
9	20	3400	7915,603457	-4515,603457	20390674,5824			
10			somma scarti	al quadrato	44476383,3903		R quadro	0,97200583



La migliore interpolante che calcola il risolutore è

$$y = 3442,5207862362 + 2623,6541335467x - 120x^2$$

in corrispondenza alla quale vediamo migliorata la correlazione (da 0,95 a 0,97) e vediamo una distribuzione teorica alquanto accostata a quella effettiva, anche se con scarti notevoli: ciò che si nota bene osservando il grafico, dove, come al solito, la blu è la linea che rappresenta i valori effettivi e la rossa è quella che rappresenta i valori dati dall'interpolante.

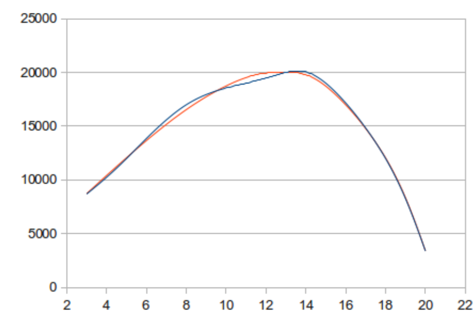
Se non siamo soddisfatti procediamo con i tentativi.

Qualche cosa di simile alla perfezione lo raggiungiamo con il polinomio di quarto grado

$$y = 3590,6560717581 + 1724,0872447843x - 2x^2 + 0,517760724x^3 - 0,2375405294x^4$$

che deriviamo dal tentativo seguente

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y stimato	scarto	scarto quadrato		coefficienti	
2	3	8700	8739,656563	-39,65656278	1572,64297114		a	3590,656072
3	5	12000	12077,34956	-77,34955528	5982,95370225		b	1724,087245
4	8	17000	16547,48151	452,5184879	204772,98186		c	-2
5	11	19000	19524,9244	-524,9243965	275545,622023		d	0,517760724
6	13	20000	20018,9155	-18,9155032	357,79626141		e	-0,237540529
7	15	19000	18723,91788	276,082116	76221,3347588		f	
8	18	12000	12059,7524	-59,75240152	3570,34948761		g	
9	20	3400	3408,002049	-8,00204867	64,0327829194			
10			somma scarti	al quadrato	568087,713847		R quadro	0,998832088



dove la correlazione sale praticamente all'unità e gli accostamenti tra valori reali e teorici sono notevoli, con un grafico quasi sovrapposto.

* * *

La precisione dei risultati che fornisce il risolutore in questo tipo di problemi dipende molto dalla vicinanza delle ipotesi di partenza a quelle finali.
Dobbiamo pertanto sforzarci di inserire i coefficienti iniziali ipotetici dai quali far partire l'iterazione del risolutore in maniera tale che la distribuzione teorica di avvio sia il più possibile accostata a quella effettiva: in ciò ci aiuta molto il grafico.
Soprattutto facendo attenzione al tipo di curva e alla sua concavità o ai suoi eventuali punti di flesso, che dovrebbero essere già almeno accennati nella situazione ipotetica di partenza.

8.2 Regressione

La regressione è un modo di realizzare l'interpolazione tra punti noti diversa da quella che abbiamo visto nel paragrafo precedente e, per un certo verso, ne rappresenta una sottocategoria.

Il nome con cui sono definiti questi metodi risale ai primi tentativi con i quali il Galton studiò l'ereditarietà di alcuni fenomeni naturali ed ha ormai un mero significato storico per nulla collegato alla natura matematica dei procedimenti attualmente applicati. Di certo conserva dal passato il fatto che si tratta di una interpolazione lineare: l'interpolante si chiama infatti retta di regressione.

Giocando con trasformazioni logaritmiche di una o di entrambe le variabili x e y si possono ottenere curve di regressione e interpolare bene anche dati che presentano andamenti non lineari.

In ogni caso, mentre l'interpolazione polinomiale che abbiamo visto nel paragrafo precedente si presta anche alla descrizione di dati fluttuanti (che vanno alternativamente su e giù), la regressione, essendo basata su un concetto di linearità, che rimane anche se si lavora su trasformate logaritmiche, si presta solo a descrivere dati che abbiano marcate tendenze (sempre su o sempre giù).

Pertanto, se l'interpolazione polinomiale è l'ideale per andare a scoprire valori ignoti all'interno del campo di variazione dei valori osservati (vera e propria interpolazione), la regressione si presta meglio a scoprire valori ignoti all'esterno del campo di variazione dei valori osservati (propriamente detta estrapolazione) e si presta meglio ad effettuare previsioni.

Regressione lineare semplice

Dal momento che l'interpolante è una retta, la sua equazione è il polinomio di primo grado $y = a+bx$ e possiamo trovare i valori di a e di b con il metodo dei minimi quadrati visto nel precedente paragrafo.

Tra le funzioni preconfezionate nel foglio di calcolo ne troviamo una che ci dà tuttavia modo di fare prima e meglio. Si tratta della funzione, che troviamo elencata nella categoria MATRICE, in quanto, come tutte le altre che vedremo parlando di regressione, si tratta di una formula di matrice

REGR.LIN(dati Y; dati X; tipo retta; statistiche)

Restituisce il valore di a e di b per la retta di regressione $y = a + bx$.
“dati Y” e “dati X” sono le serie di valori osservati.
“tipo retta” consente di scegliere se la retta debba passare per l’origine degli assi o meno: se si omette di inserire questo parametro o se si inserisce il valore 1 (vero) la retta non necessariamente passerà per l’origine e verrà restituito il valore di a (intercetta); se si inserisce il valore 0 (falso) la retta passerà per l’origine e verrà restituito il valore di b (pendenza) con l’indicazione 0 per a.
“statistiche” consente di scegliere se debba essere restituito il solo valore di a e di b (inserendo 0) o se debbano essere restituiti anche indicatori vari, tra cui il coefficiente di correlazione e altri per giudicare dell’attendibilità dell’interpolante.
Esempio:
Partiamo dalla serie di valori

x	y
45	135
72	212
85	265
98	284
145	422
148	443
154	478
165	523

che ci era servita nel paragrafo precedente per l’interpolazione con la retta, inseriamo i dati nel foglio di calcolo e utilizziamo la funzione REGR.LIN ottenendo quanto segue

	A	B	C	D	E
1	x	y		3,119727403	-10,39892396
2	45	135		0,11683265	14,18374352
3	72	212		0,991655368	13,79417126
4	85	265		713,0251392	6
5	98	284		135673,825	1141,674964
6	145	422			
7	148	443			
8	154	478			
9	165	523			

Nella cella D1, dove abbiamo inserito la formula =REGR.LIN(B2:B9;A2:A9;1;1) come formula di matrice per produrre quanto vediamo, troviamo il valore di b (la pendenza della retta) $a + bx$.
Nella cella E1 troviamo il valore di a (intercetta della retta sull’asse delle y).
Nelle celle D2 e E2 abbiamo gli errori standard dei due rispettivi dati nelle celle di sopra.
Nella cella D3 abbiamo il valore del coefficiente di correlazione R^2.
Nella cella E3 abbiamo l’errore standard della regressione calcolata per il valore Y.
Nella cella D4 vediamo il valore del test F risultante dall’analisi della varianza.
Nella cella E4 abbiamo i gradi di libertà risultanti dall’analisi della varianza.
Nella cella D5 abbiamo la somma del quadrato della deviazione dei valori Y stimati rispetto alla media lineare.
Nella cella E5 abbiamo, infine, la somma del quadrato della deviazione del valore Y stimato rispetto ai valori Y dati.
I valori di a e di b, il valore di R^2 e il valore della somma dei quadrati degli scarti tra valori osservati e valori stimati coincidono esattamente con quelli calcolati con il procedimento di interpolazione trattato nel paragrafo precedente.

Una volta trovati i valori di a e di b, inserendoli nella formula $y = a + bx$ abbiamo modo di calcolare il valore di y in corrispondenza a qualsiasi valore di x.

Anche per fare questo esiste una formula preconfezionata, tra le formule di matrice

TENDENZA(dati Y; dati X; nuovi dati X; tipo retta)
Restituisce valori di Y corrispondenti a nuovi valori di X sulla base dei valori dati Y e dati X osservati, secondo una interpolazione data dal tipo retta (0 se passante per l’origine, 1 se non necessariamente passante per l’origine).
Esempio:
Partiamo dalla serie di dati del precedente esempio, la inseriamo in un foglio di calcolo e, nella colonna delle X, inseriamo altri valori per i quali non abbiamo il valore corrispondente Y.Nella cella vuota delle Y di fianco alla prima cella delle X aggiunte inseriamo la formula e vediamo il risultato:

	A	B
1	x	y
2	45	135
3	72	212
4	85	265
5	98	284
6	145	422
7	148	443
8	154	478
9	165	523
10		
11	185	566,7506456
12	197	604,1873745
13	245	753,9342898

Nella cella B11 è stata inserita la formula =TENDENZA(B2:B9;A2:A9;A11:A13;1) come formula di matrice e di fianco ai valori della X aggiunti a quelli osservati, compaiono quelli estrapolati.

Questa formula ha lo svantaggio di non dirci nulla sull'attendibilità dei valori calcolati e la userei con estrema cautela. Quanto meno occorrerebbe prima verificare la correlazione esistente tra i dati osservati: se il valore di R^2 calcolato con la formula CORRELAZIONE(dati X, dati Y) è prossimo all'unità possiamo arrischiare il calcolo della tendenza con questa formula, altrimenti è meglio lasciar perdere.

Del resto, una volta determinati a e b con la formula REGR.LIN e valutati gli errori standard e la correlazione, cioè acquisito un giudizio positivo sull'affidabilità della nostra interpolante, non ci vuol molto, su un foglio di calcolo, a calcolare quanti valori di Y ignoti vogliamo, senza bisogno di ricorrere a questa formula al buio.

Linea di potenza

Con la formula della regressione lineare REGR.LIN possiamo anche determinare a e b in una equazione di linea curva del tipo $y = ax^b$, chiamata linea di potenza.
Basta che applichiamo la formula REGR.LIN ai logaritmi naturali delle x e delle y osservate.

In forza del fatto che

$$y = ax^b$$

equivale a

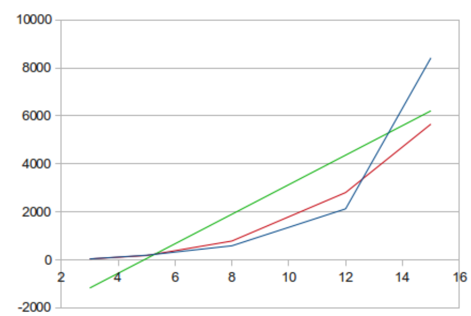
$$log_e y = log_e a + b\, log_e x$$

applicando la formula REGR.LIN ai valori $log_e y$ e $log_e x$ otteniamo i valori di b e di $log_e a$, il primo da inserire tale e quale come esponente nell'equazione della linea di potenza, il secondo da inserire in quell'equazione come esponente di e, cioè, $e^{log_e a}$, cosa facile da ottenere inserendo il valore restituito da REGR.LIN nella formula EXP().
Esempio:
Supponiamo di dover interpolare le serie

x	y
3	40
5	190
8	585
12	2125
15	8420

Nella seguente figura vediamo come e con quali risultati è possibile farlo con una retta o con una linea di potenza.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y		per retta			y teorici
2	3	40		615,781893	-3023,72428		-1176,378601
3	5	190		212,1564485	2050,357895		55,18518519
4	8	585		0,737405212	2091,651706		1902,530864
5	12	2125		8,42444609	3		4365,658436
6	15	8420		36857009,42	13125020,58		6213,004115
7							
8	logaritmi			per linea di potenza			y teorici
9	1,098612289	3,688879454		3,145480472	0,122820281	1,130681198	35,81918995
10	1,609437912	5,247024072		0,256191269	0,532848444		178,6227082
11	2,079441542	6,371611847		0,980487277	0,334792355		783,4153725
12	2,48490665	7,661527081		150,7458399	3		2804,682508
13	2,708050201	9,038365107		16,89648627	0,336257762		5658,64253



Nella parte alta del foglio ho fatto il tentativo di interpolare con la retta, inserendo nella cella D2 la formula =REGR.LIN(B2:B6;A2:A6;1;1) come formula di matrice, che produce i valori teorici elencati nelle celle da G2 a G6 calcolati con la formula =$E$2+$D$2*A2.
Il coefficiente di correlazione R^2è 0,737, molto basso.
Nel grafico l'interpolante lineare così individuata è la retta di colore verde e vediamo quanto poco assomigli alla curva blu indicante la situazione effettiva dei dati osservati.
Sotto ho fatto il tentativo di trovare una interpolante di potenza, incoraggiato dall'alta maggiore proporzionalità con cui variano i dati Y rispetto ai dati X.
La tabella dei dati osservati è stata tramutata in logaritmica con la formula LN() e nella cella D9 ho inserito la formula =REGR.LIN(B9:B13;A9:A13;1;1), come si vede riferita alle serie di valori logaritmici.
Ho tradotto il valore nella cella E9 nel valore nella cella F9 con la formula =EXP(E9) e, nelle celle da G9 a G13 vediamo i valori teorici calcolati con la formula =$F$9*A2^$D$9.
Il coefficiente di correlazione R^2è 0,98, molto buono.
Nel grafico l'interpolante a linea di potenza così individuata è la curva di colore rosso, che accosta abbastanza quella di colore blu indicante la situazione effettiva dei dati osservati.

Linea esponenziale

Sempre con la formula di regressione lineare REGR.LIN potremmo, infine, determinare a e b in una equazione di linea curva del tipo $y = ae^{bx}$, chiamata linea esponenziale.
Basta che applichiamo la formula REGR.LIN a una tabella nella quale alle x osservate vengono fatti corrispondere i logaritmi naturali delle y osservate.

In forza del fatto che

$$y = ae^{bx}$$

equivale a

$$log_e y = log_e a + bx$$

applicando la formula REGR.LIN ai valori $log_e y$ e x otteniamo i valori di b e di $log_e a$, il primo da inserire tale e quale come esponente nell'equazione della linea esponenziale moltiplicato per x, il secondo da inserire in quell'equazione come esponente di e, cioè, $e^{log_e a}$, cosa facile da ottenere inserendo il valore restituito da REGR.LIN nella formula EXP().

Il foglio di calcolo è dotato di una formula che fa tutto questo lavoro partendo direttamente dai dati osservati così come sono, senza bisogno di alcuna trasformazione logaritmica e fornendoci i valori di a e di b inseribili nella ancor più semplice espressione

$$y = ab^x$$

Si tratta della funzione, che troviamo ancora tra le formule di Matrice

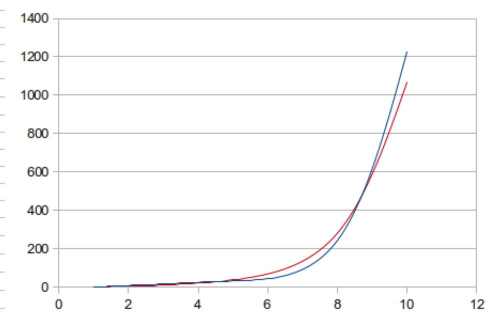
REGR.LOG(dati Y; dati X; tipo funzione; parametri)
Restituisce il valore di a e di b per l'equazione esponenziale $y = ab^x$.

"dati Y" e "dati X" sono le serie di valori osservati.
"tipo funzione" consente di scegliere se debba essere calcolato il coefficiente a: se si omette di inserire questo parametro o se si inserisce il valore 1 (vero) il coefficiente verrà calcolato; se si inserisce il valore 0 (falso) il coefficiente sarà indicato uguale a 1e l'equazione si ridurrà a $y = b^x$.
"parametri" consente di scegliere se debba essere restituito il solo valore di a e di b (inserendo 0) o se debbano essere restituiti anche indicatori vari, tra cui il coefficiente di correlazione e altri per giudicare dell'attendibilità dell'interpolante.
Esempio:
Partiamo dalla serie di valori

x	y
1	2
2	8
5	32
8	243
10	1228

L'andamento fortemente crescente della Y al variare della X suggerisce un vero e proprio andamento esponenziale e il tentativo di interpolazione con una curva esponenziale fornisce questo ottimo risultato

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y					y teorici
2	1	2		1,949890856	1,345120981		2,622839101
3	2	8		0,044092546	0,274650905		5,114249979
4	5	32		0,987089299	0,338106745		37,9151571
5	8	243		229,3653904	3		281,0889463
6	10	1228		26,22017321	0,342948513		1068,721072



L'interpolante $y = 1,345120981 * 1,949890856^x$ si rivela ottima, con un R^2poco inferiore a 0,99 e il grafico lo dimostra (come sempre la curva blu è quella dei valori osservati e la rossa è quella dei valori calcolati con l'interpolante).

Una volta trovati i valori di a e di b, inserendoli nella formula $y = ab^x$ abbiamo modo di calcolare il valore di y in corrispondenza a qualsiasi valore di x.

Anche per fare questo esiste una formula preconfezionata, tra le formule di matrice

CRESCITA(dati Y; dati X; nuovi dati X; tipo funzione)
Restituisce valori di Y corrispondenti a nuovi valori di X sulla base dei valori dati Y e dati X osservati, secondo una interpolazione data da una esponenziale di tipo b^x se si sceglie il tipo funzione 0 o di tipo ab^x se non si sceglie il tipo funzione o si sceglie 1.
Esempio:
Partiamo dalla serie di dati del precedente esempio, la inseriamo in un foglio di calcolo e, nella colonna delle X, inseriamo altri valori per i quali non abbiamo il valore corrispondente Y.
Nella cella vuota delle Y di fianco alla prima cella delle X aggiunte inseriamo la formula e vediamo il risultato:

	A	B
1	x	y
2	1	2
3	2	8
4	5	32
5	8	243
6	10	1228
7		
8	7	141,5366283
9	9	582,6433599
10	12	4866,354414
11		

Sulle cautele con le quali utilizzare questa funzione valga quanto ho osservato prima in merito all'uso della sua funzione gemella TENDENZA(). Anzi, in questo caso, estrapolando da una crescita esponenziale non perfettamente interpolata, c'è il rischio di partire per la tangente e di dare veramente i numeri.

Regressione lineare multipla

Può accadere che una variabile dipendente Y sia influenzata da più variabili indipendenti X.

Per esempio, il consumo di energia elettrica in un territorio comunale non dipende solo dal numero degli abitanti ma anche dal loro reddito pro-capite, dal numero di addetti all'industria, ecc.

L'osservazione di questi fenomeni ci mette pertanto di fronte a tabelle nelle quali in corrispondenza ad un valore osservato Y abbiamo tante osservazioni X_1, X_2, X_3, ecc. e potrebbe interessare capire il peso che ciascuna di queste X ha nel determinare i valori di Y, così come potrebbe interessare capire che cosa succederebbe alla Y variando il valore di una qualsiasi X.

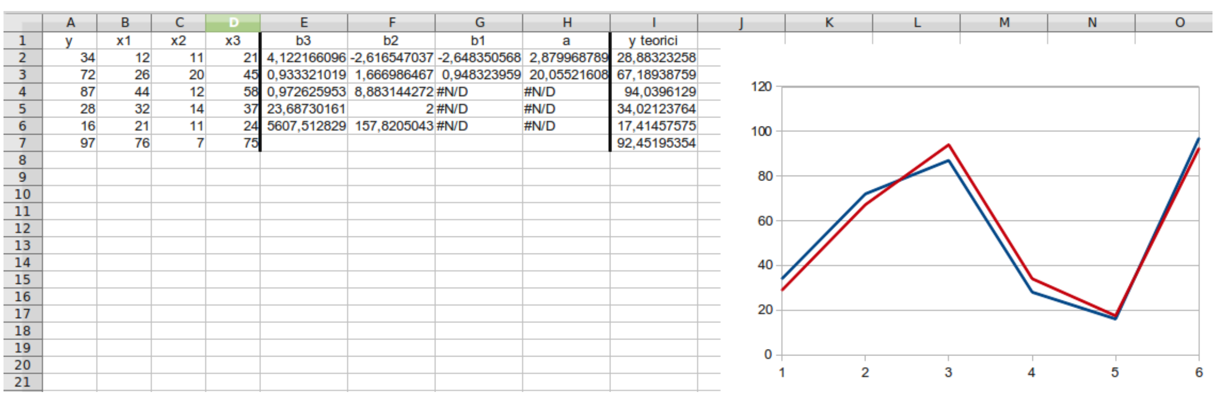
In tutti questi casi possiamo utilizzare la funzione precostituita REGR.LIN inserendo, nella finestrella dove ci si chiedono gli indirizzi per i valori della X non già la selezione di una sola colonna come abbiamo fatto nei precedenti esercizi ma tutta l'area della tabella dove abbiamo i valori delle X_1, X_2, X_3, ecc.

La regressione lineare, in questi casi, è espressa da una equazione del tipo

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3........$$

e il ritorno della funzione REGR.LIN è una matrice nella cui prima riga troviamo, all'estrema destra, il valore di a preceduto, da destra a sinistra, dai valori di b_1, b_2, b_3, ecc.: attenzione all'ordine inverso dei coefficienti come sono esposti nel ritorno dalla funzione (da destra a sinistra) rispetto all'ordine in cui sono sistemati nell'equazione (da sinistra a destra).

Un esempio per chiarire.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	y	x1	x2	x3	b3	b2	b1	a	y teorici
2	34	12	11	21	4,122166096	-2,616547037	-2,648350568	2,879968789	28,88323258
3	72	26	20	45	0,933321019	1,666986467	0,948323959	20,05521608	67,18938759
4	87	44	12	58	0,972625953	8,883144272	#N/D	#N/D	94,0396129
5	28	32	14	37	23,68730161	2	#N/D	#N/D	34,02123764
6	16	21	11	24	5607,512829	157,8205043	#N/D	#N/D	17,41457575
7	97	76	7	75					92,45195354

Sulla sinistra abbiamo il dataset di partenza, dove la Y si relaziona con terne di valori della X.

Subito a destra abbiamo la matrice generata dalla formula =REGR.LIN(A2:A7;B2:D7;1;1), inserita come formula di matrice nella cella E2: vediamo che al parametro dati Y corrispondono gli indirizzi della sola colonna delle Y e al parametro dati X corrisponde tutta la zona B2:D7.

Nella prima riga della matrice abbiamo i coefficienti, come si è detto, in ordine inverso rispetto a come compaiono nell'equazione, equazione che risulta essere, arrotondando i valori al secondo decimale.

$$y = 2,88 - 2,65x_1 - 2,62x_2 + 4,12x_3$$

Nella cella E4 abbiamo un R^2 di ottimo livello, come del resto dimostra il raffronto tra i valori della y osservati (colonna A) e quelli teorici calcolati con l'equazione (colonna I), raffronto evidenziato anche nel grafico ove, al solito, la linea blu rappresenta i valori osservati e quella rossa rappresenta i valori teorici.

9 Calcoli per la statistica inferenziale

La statistica inferenziale è la branca della Statistica che, con metodo induttivo, si occupa della ricerca di leggi di validità generale partendo dal particolare.

Tipici i procedimenti attraverso i quali si stimano le caratteristiche di un universo partendo da osservazioni campionarie.

E' la branca della Statistica che più ha a che fare con la teoria della Probabilità e il foglio di calcolo contiene parecchie formule e funzioni preconfezionate per eseguire calcoli attinenti questo settore.

Qui ricordo le principali, di più ricorrente applicazione.

9.1 Calcolo combinatorio

Le formule precostituite per il calcolo combinatorio in LibreOffice e simili sono le seguenti.

COMBINAZIONE(Intero1; Intero2)
Con Intero1 maggiore di Intero2 restituisce le combinazioni senza ripetizione $C_{n,k}$ di n elementi (Intero1) presi k a k (Intero2).
Per ottenere le combinazioni con ripetizione si utilizza
COMBINA(Intero1; Intero2)

PERMUTAZIONE(Intero1; Intero2)
Se Intero1 e Intero2 sono uguali restituisce le permutazioni senza ripetizione P_n di n elementi (Intero1 uguale a Intero2).
Con Intero1 maggiore di Intero2 restituisce le disposizioni senza ripetizione $D_{n,k}$ di n elementi (Intero1) presi k a k (Intero2).
Per ottenere permutazioni e disposizioni con ripetizione si utilizza
PERMUTAZIONA(Intero1; Intero2)
attenzione alla a finale.

9.2 Probabilità legate a test statistici

I test statistici servono per valutare l'inferenza statistica.

Si può trattare di valutare se le medie e le varianze riscontrate in due campioni sono da ritenersi significativamente diverse, cioè appartenenti a diversi universi, o si possano ritenere accidentalmente diverse, cioè appartenenti allo stesso universo: problema ricorrente nella ricerca scientifica, per esempio per valutare gli effetti di una cura tra un campione di pazienti ai quali sia stata somministrata e un campione di pazienti ai quali non sia stata somministrata.

Si può trattare di valutare con quale probabilità un certo valore possa appartenere ad una certa distribuzione.

Le funzioni preconfezionate nel foglio di calcolo per problemi di questo tipo, sempre legati al calcolo delle probabilità, sono moltissime e qui ricordo quelle di uso più ricorrente.

DISTRIB.NORM(N; media; DevSt; tipo)
Utilizza la curva gaussiana per indicare la densità di probabilità e la probabilità cumulativa di un valore.
I parametri da indicare sono
"N", il valore di cui si cerca la probabilità
"media", la media della distribuzione di riferimento
"DevSt", la deviazione standard della distribuzione di riferimento
"tipo", se indicato con 0 (falso), restituisce la densità di probabilità (che serve a ben poco), se non indicato o indicato con 1 (vero) restituisce la probabilità cumulativa.

Per differenza tra la probabilità cumulativa di un valore superiore e la probabilità cumulativa di un valore inferiore si ottiene la probabilità che un valore sia compreso in un intervallo: in questo modo si ottengono i valori leggibili nella tavola della funzione $\Theta(\lambda)$.
Per differenza tra 1 e questa probabilità si ottiene la probabilità che un valore sia fuori dall'intervallo.
Esempio:
E' stata misurata con un righello la lunghezza di 15 bulloni, come campione di bulloni prodotti da una certa macchina regolata per tagliare i bulloni ad una lunghezza di 82 mm.
Ne è venuta fuori una lunghezza media di 82,01 mm. con uno scarto quadratico medio (deviazione standard) di 0,33.
Si chiede con quale probabilità quella macchina possa tagliare un bullone lungo meno di 81,18 mm. o lungo più di 82,82 mm., visto che il limite di tolleranza per la vendibilità dei bulloni è dell'1% in più o in meno sulla lunghezza garantita di 82 mm.
Con la formula =DISTRIB.NORM(82,82;82;0,33;1)-DISTRIB.NORM(81,18;82;0,33;1) determiniamo la probabilità 0,987 che si verifichino scarti inferiori a 0,82 mm., pertanto la probabilità che si verifichino scarti superiori, che, cioè, si ottengano bulloni più lunghi di 82,82 o più corti di 81,18 è 0,013.
Penso si possa concludere che la macchina funziona abbastanza bene.

DISTRIB.F(N; Gradi libertà 1; Gradi libertà 2)
Restituisce la probabilità collegata ad un valore del test **F** di Snedecor.
"N" è il valore del test e "Gradi di libertà 1" e "Gradi di libertà 2" sono i gradi di libertà $(n-1)$ dei gruppi di valori di partenza.
Il test da immettere è calcolabile con la formula

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

dove al numeratore e al denominatore abbiamo le varianze di due campioni.
La differenza tra le varianze è da considerarsi sicuramente significativa se la probabilità è inferiore a 0,01 e molto probabilmente significativa se la probabilità è superiore a 0,01 ma inferiore a 0,05.
Se la probabilità è superiore a 0,05 la differenza tra le varianze è da considerarsi accidentale.
Se utilizziamo la funzione
TEST.F(Dati 1; Dati 2)/**2**
dove "Dati 1" e "Dati 2" sono i dati osservati per due campioni,
otteniamo direttamente fa probabilità del test F senza bisogno di calcolarlo e di utilizzare la funzione precedente.

DISTRIB.T(N; Gradi libertà; Modo)
Restituisce la probabilità collegata ad un valore del test **t** di Student[10].
"N" è il valore del test e "Gradi di libertà" è il valore dei gradi di libertà complessivi dei gruppi di dati $(n_1 + n_2 - 2)$.
"Modo" indica se il test debba essere biunivoco (valore da inserire 2) o univoco (valore da inserire 1).
Scegliendo il modo 2 (biunivoco) il valore ottenuto è il complemento a 1 di quello ottenibile dagli usuali prontuari della funzione di Student.
Il test da immettere è calcolabile con la formula

$$t = \frac{(M-M_u)\sqrt{m}}{\sigma}$$

nel caso si debbano confrontare una media campionaria e una media universale, oppure con la formula

[10]Student è lo pseudonimo di William Sealy Gosset, lo statistico inglese che inventò il test quando studiava le caratteristiche di vari tipi di malto presso la birreria Guiness, di cui fu anche direttore. La scoperta, effettuata in costanza di rapporto di lavoro dipendente, a causa delle regole della birreria non poté essere resa pubblica con il vero nome del suo inventore che, allora, scelse questo pseudonimo.

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

nel caso si debbano confrontare due medie campionarie.
La differenza tra le medie è da considerarsi sicuramente significativa se la probabilità è inferiore a 0,01 e molto probabilmente significativa se la probabilità è superiore a 0,01 ma inferiore a 0,05.
Se la probabilità è superiore a 0,05 la differenza tra le medie è da considerarsi sicuramente accidentale.
Se utilizziamo la funzione
TEST.T(Dati 1; Dati 2; Modo; Tipo)
dove "Dati 1" e "Dati 2" sono i dati osservati per due campioni,
"Modo" è, come prima, 2 se biunivoco e 1 se univoco (modo da evitare per un uso corretto della formula)
"Tipo" ci consente di scegliere 1, nel caso la varianza dei due campioni non sia significativamente diversa o 2, nel caso la varianza tra i due campioni sia significativamente diversa,
otteniamo direttamente la probabilità del test t senza bisogno di calcolarlo e di utilizzare la funzione precedente.

Esempio:
Per verificare l'efficacia di due sistemi di concimazione dei pomodori sono state piantate 9 piantine della stessa qualità, a gruppi di 3, in tre aiuole a distanza di 4 metri.
La prima aiuola e le relative piante sono state trattate con un concime in polvere solubile da applicare ogni settimana, con un certo dosaggio, in soluzione di 10 litri nel terreno e in soluzione da 1 litro a spruzzo sulle foglie.
La seconda aiuola è stata trattata con un concime granulare distribuito in un certo dosaggio quindicinalmente sul terreno.
Per la terza aiuola non è stato applicato alcun trattamento.
In questo modo ciascun gruppo di piante ha avuto tutti gli altri trattamenti di irrigazione, di diserbaggio, ecc. è cresciuto su un terreno omogeneo dal punto di vista della composizione ed è stato esposto agli stessi agenti atmosferici di insolazione, esposizione alla pioggia, ecc. Unica differenza quella del trattamento di concimazione.
I primi 6 pomodori venuti a maturazione in ciascun gruppo di piante sono stati pesati e sono stati inseriti i relativi dati in un foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F	G
1	APPLICAZIONE TEST t						
2	peso in grammi dei pomodori						
3	concime A	concime B	no concime		confronto concime A no concime	confronto concime B no concime	confronto concime A concime B
4	58	49	41				
5	54	55	53				
6	58	59	39				
7	48	63	53				
8	67	58	41				
9	69	43	46				
10							
11	59	54,5	45,5	medie			
12				probabilità test F	0,620478909	0,739182632	0,870020696
13				probabilità test t	0,046257694	0,052608056	0,458734828

Nella colonna A abbiamo il peso dei sei pomodori colti dalle piante della prima aiuola, nella colonna B abbiamo il peso dei sei pomodori colti dalle piante della seconda aiuola e nella colonna C abbiamo il peso dei pomodori colti dalle piante della terza aiuola, quella non concimata.
A lato dei dati raccolti è stato organizzato il confronto con i test, su tre colonne, rispettivamente dedicate al confronto tra la prima e la terza aiuola, tra la seconda e la terza aiuola e tra la prima e la seconda aiuola.
Innanzi tutto, inserendo nelle celle E12, F12 e G12 la formula del test F che abbiamo visto prima si verifica che le varianze non differiscono in maniera significativa (le probabilità sono in ogni caso superiori a 0,05).
Da qui l'inserimento, nelle celle E13, F13 e G13, della formula del test t con l'indicazione di tipo 1.
Nella cella E13 abbiamo la formula =TEST.T(A4:A9;C4:C9;2;1), nella cella F13 abbiamo la formula =TEST.T(B4:B9;C4:C9;2;1) e nella cella G13 abbiamo la formula =TEST.T(A4:A9;B4:B9;2;1).
Le probabilità risultanti ci portano a concludere che il trattamento utilizzato per le piante della prima aiuola probabilmente ha avuto un qualche effetto, ma non è detto (la probabilità, nel raffronto con l'aiuola non concimata, è compresa tra 0,01 e 0,05 ma è molto vicina al limite di 0,05). Il trattamento utilizzato per la seconda aiuola probabilmente non ha avuto alcun effetto (la probabilità, pur di poco, è superiore a 0,05). Ad accomunare nell'incertezza le due aiuole trattate c'è la costatazione, dal raffronto tra loro due, che le loro medie non differiscono in maniera significativa (probabilità del test di molto superiore a 0,05).
Questa incertezza che ci portano i test statistici di fronte ad una situazione nella quale, a occhio e vedendo le medie, chiunque non avrebbe dubbi sul fatto che le due concimazioni funzionino, quella della prima aiuola meglio di quella della seconda, la dice lunga sulla serietà del processo.

Alla base di tutto sta il fatto che sono stati pesati 6 pomodori per ogni gruppo di piante: si tratta pertanto di un campione molto piccolo, e la statistica ne tiene conto.
Se tutti gli statistici, a volte improvvisati, che pretendono di prevedere l'esito delle elezioni sentendo che cosa hanno votato un po' di persone sentite fuori dai seggi trattassero i dati acquisiti con la serietà di questi strumenti sicuramente prenderebbero meno cantonate.

DISTRIB.CHI(N; Gradi libertà)
Restituisce la probabilità collegata ad un valore del test χ^2 di Pearson.
"N" è il valore del test e "Gradi di Libertà" è il valore dei gradi di libertà della distribuzione effettiva $(n-1)$.
Il test da immettere si calcola con la formula

$$\chi^2 = \sum_{1}^{n} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

dove le f_i rappresentano le frequenze effettive e le F_i rappresentano le frequenze teoriche di due distribuzioni di frequenza.
La discordanza tra le distribuzioni di frequenza è da considerarsi sicuramente significativa se la probabilità è inferiore a 0,01 e molto probabilmente significativa se la probabilità è superiore a 0,01 ma inferiore a 0,05.
Se la probabilità è superiore a 0,05 la discordanza tra le distribuzioni di frequenza è da considerarsi accidentale.
Se utilizziamo la funzione
TEST.CHI(frequenze effettive; frequenze teoriche)
possiamo ottenere direttamente la probabilità partendo dai dati delle due distribuzioni di frequenza senza bisogno di calcolare il test.

10 Calcoli finanziari

Il foglio di calcolo contiene moltissime formule preconfezionate per calcoli finanziari.

Qui mi limito a ricordare quelle che ci possono aiutare a risolvere i problemi più ricorrenti e meno banali: alcune formule preconfezionate, infatti, o riguardano problemi che non ci capiterà mai di affrontare o riguardano banalissimi problemi risolvibili con la calcolatrice di base che ci passa il telefonino.

10.1 Tassi equivalenti

Succede spesso che, chiedendo un prestito con rimborso a rate mensili, ci venga detto che il tasso applicato è, per esempio, il 6% annuo, cioè lo 0,50% mensile (6 diviso 12). Così si inserisce 0,50 nella formula per calcolare la rata mensile e, convinti di pagare il 6% annuo, si paga in realtà il 6,168% annuo. Tutto perché, se si paga una rata mensile, mensilmente avviene il calcolo degli interessi che si devono includere nella rata, cioè si entra in un regime di capitalizzazione mensile, ed è pertanto errato dire che, se il tasso in regime di capitalizzazione annua è 6% il suo equivalente in regime di capitalizzazione mensile è 6 diviso 12: così facendo si applica il 6% che si applicherebbe nel caso di rimborso con una sola rata annuale pagata a fine anno senza tenere conto che, in realtà, si pagano 12 rate, a cominciare dalla fine del primo mese e via di seguito.

Per non parlare della vera e propria truffa di chi presta 1.000 euro, fissa una rata di rimborso mensile di 86 euro (corrispondente all'applicazione scorretta dello 0,50% mensile di prima) e poi, visto che 86 rate mensili equivalgono a 1.032 euro, dal momento che si sono pagati 32 euro di interessi su 1.000, fa credere che il tasso applicato sia il 3,2%.

Per ovviare a questi inconvenienti il legislatore ha istituito l'obbligo di enunciazione del TAN (tasso annuo nominale) e, se il prestito comporta l'applicazione di oneri di istruttoria oltre agli interessi, del TAEG (tasso annuo effettivo globale), che vengono calcolati con formule che fanno giustizia di tutti i possibili trucchi sopra esemplificati.

Il foglio di calcolo ci aiuta in questi conteggi fornendoci due formule importanti.

NOMINALE(Tasso effettivo; Numero rate nell'anno)
Restituisce il tasso di interesse annuo nominale equivalente ad un tasso effettivo annuo tenendo conto delle rate pagate in un anno.
Dividendo il risultato di questa formula per il numero di rate nell'anno si ottiene il tasso relativo al periodo di rata equivalente al tasso effettivo.
Esempio:
Al tasso annuo del 6%, come si è detto nell'esempio in premessa, non corrisponde il tasso mensile dello 0,50% in quanto il tasso nominale annuo con rimborso a rate mensili (12 rate nell'anno) che corrisponde al tasso effettivo annuo del 6%, che risulta dalla formula =NOMINALE(0,06;12) è 5,84%.
Pertanto il tasso equivalente mensile al tasso annuo del 6% è 5,84 diviso 12 = 0,0048675506, cioè circa 0,487%.
Notare che nella formula, quando si indica il tasso percentuale, o si indica il tasso diviso 100 (0,06 per 6%) o si indica il tasso seguito dal simbolo %.

EFFETTIVO(Tasso nominale; Numero rate nell'anno)
E' la formula inversa della precedente e restituisce il tasso di interesse effettivo annuo equivalente ad un tasso di interesse nominale che tiene conto delle rate pagate in un anno.
Se partiamo da un tasso nominale equivalente di periodo, come tasso nominale dobbiamo inserire questo tasso moltiplicato per il numero delle rate nell'anno.
Esempio:
Se vogliamo determinare il tasso annuo effettivo equivalente ad un tasso dello 0,50% mensile usiamo la formula =EFFETTIVO(0,005*12;12) ed otteniamo 6,168%.

10.2 Rendite costanti

Un altro tipo di calcoli abbastanza complicati su un argomento che può interessare anche l'uomo della strada è quello delle rendite costanti. Per intenderci, rientrano in questo campo i calcoli attinenti mutui e prestiti personali con rimborso a rata costante.

Per problemi di questo tipo il foglio di calcolo ci offre queste preziose formule preconfezionate.

VAL.FUT(Tasso; Numero rate; Rata; Valore attuale; Tipo)
Restituisce il valore futuro (montante) di un investimento sulla base di pagamenti periodici costanti e di un tasso di interesse costante.
"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Numero rate" è il numero dei pagamenti periodici.
"Rata" è l'importo del pagamento periodico: importante ricordare che nel foglio di calcolo tutto quanto rappresenta un pagamento, cioè un'uscita di denaro, è un'entità negativa e va inserita con il segno -.
"Valore attuale" è l'eventuale valore già accumulato all'inizio del piano: in genere è zero.
"Tipo" serve per indicare se i pagamenti avvengono all'inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l'inserimento o si inserisce 0).
Esempio:
Versando per 5 anni, all'inizio di ciascun anno, 1.000 euro all'anno su un fondo che rende il 4% cosa avremo accumulato alla fine del quinto anno?
Il risultato ce lo fornisce la formula =VAL.FUT(0,04;5;-1000;0;1) in 5.632,98 euro.

VA(Tasso; Numero rate; Rata; Valore futuro; Tipo)
Restituisce il valore attuale di una serie di pagamenti periodici costanti.

"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Numero rate" è il numero dei pagamenti periodici.
"Rata" è l'importo del pagamento periodico: importante ricordare che nel foglio di calcolo tutto quanto rappresenta un pagamento, cioè un'uscita di denaro, è un'entità negativa e va inserita con il segno -.
"Valore futuro" è il valore rimanente dopo aver effettuato l'ultimo pagamento: in genere è zero.
"Tipo" serve per indicare se i pagamenti avvengono all'inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l'inserimento o si inserisce 0).
Esempio:
Abbiamo ceduto un bene con l'accordo che esso ci sarebbe stato pagato con 24 rate mensili posticipate da 200 euro l'una.
Prima di pagare la prima rata l'acquirente ci propone di liquidarci in contanti calcolando al tasso del 3% annuo.
Quanto ci deve l'acquirente per saldare il debito ora, con un unico pagamento?
Innanzi tutto calcoliamo il tasso equivalente mensile del tasso annuo del 3% con la formula =NOMINALE(0,03;12)/12 ed otteniamo 0,0024662698.
Poi applichiamo la formula =VA(0,0024662698;24;-200;0;0) ed otteniamo il risultato di € 4.655,13 che è la somma dovutaci per saldare il debito in unica soluzione.

RATA(Tasso; Numero rate; Valore attuale; Valore futuro; Tipo)
Restituisce, come numero negativo, il pagamento periodico costante necessario per ottenere un montante o per rimborsare un valore attuale, a tasso di interesse costante.
"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Numero rate" è il numero dei pagamenti periodici.
"Valore attuale" viene indicato se il problema è quello di trovare la rata per rimborsare un valore attuale: per esempio se facciamo un mutuo e vogliamo calcolare la rata per pagarlo qui indichiamo l'importo del mutuo.
"Valore futuro" viene indicato se il problema è quello di trovare il pagamento da effettuare per aver costituito un capitale dopo un certo periodo.
Nel caso dobbiamo calcolare una rata per un contratto di leasing nel quale sia previsto un valore di riscatto finale si indica come valore attuale il valore complessivo del contratto e nel valore futuro il valore finale di riscatto, in modo che la rata (in questo caso canone) sia calcolata sulla differenza.
"Tipo" serve per indicare se i pagamenti avvengono all'inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l'inserimento o si inserisce 0).
Esempio:
Come problema inverso a quello dell'esempio riferito alla funzione VAL.FUT() ci si chiede quanto occorra versare anticipatamente all'inizio di ciascun anno per avere dopo 5 anni, al tasso del 4%, un capitale di 5.633 euro.
La risposta la otteniamo con la formula =RATA(0,04;5;0;5633;1) la cui applicazione fornisce il risultato 1.000.
Esempio:
Quale la rata mensile posticipata per rimborsare un prestito personale di 2.000 euro in un anno al tasso annuo del 5%?
Innanzi tutto calcoliamo il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 5% con la formula =NOMINALE(0,05;12)/12 che restituisce il valore 0,0040741238.
Poi dalla formula =RATA(0,0040741238;12;2000;0;0) otteniamo il valore della rata di 171,11 euro.

NUM.RATE(Tasso interesse; Rata; Valore attuale; Valore futuro; Tipo)
Restituisce il numero di pagamenti relativi ad un investimento o all'estinzione di un debito attraverso pagamenti periodici costanti a tasso di interesse costante.
"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Rata" è l'importo di ciascun pagamento periodico (attenzione al segno meno per inserire il dato).

“Valore attuale” viene indicato se il problema è quello di trovare il numero di rate per rimborsare un valore attuale: per esempio se facciamo un mutuo e vogliamo calcolare il numero di rate per pagarlo qui indichiamo l’importo del mutuo.
“Valore futuro” viene indicato se il problema è quello di trovare il numero di pagamenti da effettuare per aver costituito un capitale dopo un certo periodo.
“Tipo” serve per indicare se i pagamenti avvengono all’inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l’inserimento o si inserisce 0).
Esempio:
Abbiamo bisogno di 100.000 euro e riteniamo di non disporre annualmente di oltre 9.000 per rimborsarli. Quanti anni dovrà durare un mutuo al 3,50% annuo perché ce la facciamo?
La risposta l’abbiamo dalla formula =NUM.RATE(0,035;-9000;100000;0;0) che ritorna il valore 14,315, cioè ci serve un mutuo di 15 anni.

TASSO(Numero rate; Rata; Valore attuale; Valore futuro; Tipo; Ipotesi)
Restituisce il tasso di interesse costante applicato ad un investimento o ad un rimborso con pagamenti costanti.
“Numero rate” è il numero dei pagamenti periodici.
“Rata” è l’importo di ciascun pagamento periodico (attenzione al segno meno per inserire correttamente il dato).
“Valore attuale” viene indicato se il problema è quello di trovare il tasso in presenza del rimborso di un valore attuale: per esempio se facciamo un mutuo e vogliamo calcolare il tasso di interesse applicato.
“Valore futuro” viene indicato se il problema è quello di trovare il tasso in presenza di pagamenti da effettuare per aver costituito un capitale dopo un certo periodo.
“Tipo” serve per indicare se i pagamenti avvengono all’inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l’inserimento o si inserisce 0).
“Ipotesi” prevede l’indicazione di un numero che “assomigli” al risultato: nel nostro caso penso vada benissimo un numero come 0,02. L’indicazione è opportuna in quanto la ricerca del tasso di interesse comporta la risoluzione di un’equazione trascendente che il foglio risolve con una iterazione per tentativi. Il mancato inserimento può comportare lungo tempo per il calcolo o non ritrovamento di una soluzione nel caso ci si imbatta in una iterazione divergente.
Esempio:
Come problema inverso a quello del secondo esempio portato per la funzione RATA(), vogliamo calcolare il tasso annuo che ci è stato applicato su un prestito personale di 2.000 euro da rimborsare con 12 rate mensili da 171,11 euro ciascuna.
La risposta la otteniamo dalla formula =TASSO(12;-171,11;2000;0;0;0,02) che indica in 0,0040712 il tasso mensile, dal quale, con la formula =EFFETTIVO(0,0040712*12;12) otteniamo 5%, che è il tasso annuo.

* * *

Se si ha a che fare con mutui e prestiti rimborsabili a rata costante potrebbe essere interessante conoscere, per ciascuna rata, la quota attribuibile agli interessi e la quota utilizzabile a riduzione del debito: cose che compaiono nel così detto piano di ammortamento.

Con il foglio di calcolo, noti importo del prestito, tasso di interesse e importo della rata costante non ci vuole molto a compilare un piano di ammortamento utilizzando gli operatori aritmetici di base. Questo è un esempio.

	A	B	C	D	E
1	Piano di ammortamento di un mutuo da 50.000 euro rimborsabile in 10 rate semestrali al 4% annuo				
2	rate	rata	quota interessi	quota capitale	residuo capitale
3	1	5.560,62	990,20	4.570,42	45.429,58
4	2	5.560,62	899,68	4.660,94	40.768,64
5	3	5.560,62	807,38	4.753,24	36.015,40
6	4	5.560,62	713,25	4.847,37	31.168,02
7	5	5.560,62	617,25	4.943,37	26.224,65
8	6	5.560,62	519,35	5.041,27	21.183,38
9	7	5.560,62	419,51	5.141,11	16.042,27
10	8	5.560,62	317,70	5.242,92	10.799,35
11	9	5.560,62	213,87	5.346,75	5.452,60
12	10	5.560,62	107,98	5.452,64	-0,03

Innanzi tutto, con le formule che abbiamo appena visto, sono stati determinati i valori del problema. Stiamo parlando di un mutuo di 50.000 euro al 4% annuo rimborsabile in 10 rate semestrali ed è stato calcolato che la rata sia di 5.560,62 euro al tasso equivalente semestrale dello 0,0198039027 (praticamente 1,98% semestrale).

La costruzione del piano di ammortamento, a parte le celle che contengono intestazioni e descrizioni, avviene partendo dalla cella B3 in cui inseriamo il valore della rata e lo copiamo in tutte le altre 9 celle fino alla B12.
Nella cella C3 inseriamo il calcolo della quota interessi da includere nella prima rata, quota che è pari agli interessi su tutto l'importo del mutuo per 6 mesi: formula =50000*0,0198039027.
Nella cella D3 inseriamo il calcolo della quota capitale, che è la differenza tra l'importo della rata e la quota interessi: formula =B3-C3.
Nella cella E3 inseriamo il residuo capitale da rimborsare, che è la differenza tra l'importo del prestito e la quota capitale: formula =50000-D3.
Ora andiamo nella cella C4 e inseriamo la nuova formula per il calcolo della quota interessi che, da qui in poi, sarà calcolata sul residuo capitale da rimborsare: formula =E3*0,0198039027; copiamo la cella C4 nelle altre rimanenti della colonna C.
Copiamo la cella D3 nelle altre rimanenti della colonna D.
Nella cella E4 inseriamo la nuova formula per il calcolo del residuo capitale che, da qui in poi si baserà sui residui via via determinati: formula =E3-D4; copiamo la cella E4 nelle altre rimanenti della colonna E.
Se abbiamo fatto tutto bene compare il piano di ammortamento come lo abbiamo riportato prima.

Dal piano di ammortamento scopriamo molte cose interessanti, tra cui quella che, dopo aver pagato tre rate da 5.560,62 euro l'una, per un totale di 16.681,86, il residuo debito non è la differenza tra i 50.000 euro iniziali e le rate pagate, che farebbe 33.318,14 euro ma è 36.015,40 euro: ciò in quanto le rate pagate contenevano una quota interessi che non è andata a diminuire il residuo debito in conto capitale.

Tutte queste informazioni possiamo ottenerle, senza bisogno di costruire il piano di ammortamento, da due utilissime funzioni precostituite nel foglio di calcolo.

INTERESSI(Tasso interesse; Quale rata; Numero rate; Valore attuale; Valore futuro; Tipo)
Restituisce la quota interessi compresa nella rata indicata come Quale rata.
"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Quale rata" è il numero della rata per la quale desideriamo conoscere la quota interessi.
"Numero rate" è il numero totale delle rate previste.
"Valore attuale" è l'importo del mutuo.
"Valore futuro" nel nostro caso è 0.
"Tipo serve" per indicare se le rate vengono pagate all'inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l'inserimento o si inserisce 0).
Esempio:

Con riferimento all'esempio utilizzato per l'esercizio sul piano di ammortamento vogliamo conoscere la quota interessi che sarà compresa nella quinta rata.
La risposta la otteniamo dalla formula =INTERESSI(0,0198039027;5;10;50000;0;0) che ritorna 617,25 euro, esattamente come indicato nel piano di ammortamento.

INT.CUMUL(Tasso interesse; Numero rate; Valore attuale; Rata iniziale; Rata finale; Tipo)
Restituisce gli interessi pagati nelle rate comprese tra Rata iniziale e Rata finale.
"Tasso" è il tasso di interesse di periodo: se i pagamenti periodici sono mensili va inserito il tasso mensile, se i pagamenti periodici sono semestrali va inserito il tasso semestrale, ecc.; sempre ricordando che va inserito il tasso percentuale (o, per esempio, 5% o 0,05).
"Numero rate" è il numero totale delle rate previste.
"Valore attuale" è l'importo del mutuo.
"Rata iniziale" e "Rata finale" sono quelle che indicano la serie di rate che ci interessano.
"Tipo" serve per indicare se le rate vengono pagate all'inizio del periodo (nel qual caso occorre inserire 1) o a fine periodo (nel qual caso o si omette l'inserimento o si inserisce 0).
Esempio:
Con riferimento all'esempio utilizzato per l'esercizio sul piano di ammortamento vogliamo conoscere il totale degli interessi pagati nelle prime cinque rate.
La risposta la otteniamo dalla formula =INT.CUMUL(0,0198039027;10;50000;1;5;0) che restituisce il valore 4.027,75 euro, esattamente la somma delle prime cinque quote interessi che troviamo nel piano di ammortamento.

Per differenza tra il valore delle prime cinque rate pagate (27.803,10 euro) e questa cifra (4.027,75 euro) otteniamo quanto, delle prime cinque rate, è andato a decurtare il debito in conto capitale (23.775,35 euro) e togliendo questo importo dall'importo del mutuo abbiamo il valore del nostro residuo debito di 26.224,65, esattamente come previsto nel piano di ammortamento.